Introduction

Le but du présent mémoire est de présenter les travaux de C.Simpson [Sim94] relatifs à l'étude des représentations du groupe fondamental de variétés projectives complexes : plus précisément, il s'agit d'établir une équivalence de catégories entre ces représentations -modulo l'action du groupe linéaire- et certains types de fibrés : les fibrés plats, et les fibrés de Higgs -ceux de classes de Chern nulles-que nous allons introduire.

Dans un premier temps, donc, nous allons introduire la notion de fibré harmonique, puis celle de fibré de Higgs et faire quelques liens entre ces deux notions et celle, plus classique, de fibré plat. Cette partie fera plus particulièrement appel à des notions transcendantes (ie non algébriques) quoiqu' introduisant la notion de faisceau de Higgs (dans un cadre purement algébrique).

La seconde partie, franchement algébrique, rappelle brièvement quelques résultats de la GIT (Geometric Invariant Theory) de Mumford [MF82] ainsi que la construction des espaces de modules. Ceci nous permettra de construire trois espaces de modules associés aux objets qui nous occupent (ie fibrés de Higgs de classes de Chern nulles, fibrés plats et représentations du groupe de Poincaré) dont l'égalité de l'ensemble des points fermés donnera l'équivalence cherchée. Mais de façon plus précise on cherchera des isomorphismes entre ces objets vus comme variétés (homeomorphismes ou isomorphismes de variété entre les espaces analytiques sous jacents). En fait, on n'obtiendra jamais d'isomorphisme de variétés algébriques [Sim91] ; et l'étude de ce défaut d'isomorphisme -via, par exemple, l'étude du morphisme analytique au voisinage de l'infini- pourrait faire l'objet d'études ultérieures.

Bref historique

L'origine de ces travaux remonte à l'article de Narashiman et Seshadri de 1965 [NS65] qui établissait une correspondance biunivoque entre classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental π d'une surface de Riemann compacte X, et les classes d'isomorphismes de fibré vectoriels stables de degré 0 sur X ; cet isomorphisme est simple à exprimer :

$$(\rho : \pi \to \mathbf{U}(r)) \mapsto (E_\rho = \tilde{X} \times_\pi \mathbf{C}^r)$$

où $\tilde{X} \to X$ est le revêtement universel de X, et où le produit ci-dessus est le quotient de $\tilde{X} \times \mathbf{C}^r$ par l'action de π définie par $(\gamma, (x, v)) \mapsto (x\gamma^{-1}, \gamma v)$ $\gamma \in \pi$, $(x, v) \in \tilde{X} \times \mathbf{C}^r$. -ici on regarde, ensemblistement, $\tilde{X}_x$, la fibre au dessus de x, comme l'ensemble des chemins aboutissant à x (partant d'un point x_0 fixé) modulo homotopie ; l'action à droite de π étant l'action évidente, et l'action à gauche sur $\mathbf{C}^r$ celle donnée par la représentation (et l'action de $\mathbf{U}(r)$).- La correspondance a été étendue à toute variété projective lisse par Donaldson [Don87a, Don85, Don83] et sur toute variété kählérienne compacte par Uhlenbeck et Yau [UY86].

Le problème abordé ici est donc celui des représentations linéaires quelconques : on est alors obligé de rajouter une structure supplémentaire pour obtenir une équivalence du même type. C'est la notion de fibré de Higgs d'abord introduite par Hitchin sur les courbes algébriques. Pour ces dernières généralisations, il faut, pour définir le fibré associé à une représentation et montrer l'isomorphisme, faire intervenir certaines métriques, dites de Yang et Mills ou d'Hermite et Einstein.

Nous suivrons ici Simpson [Sim], et J.Le Potier [Pot91a] en présentant les choses via l'introduction des fibrés harmoniques.

Table des matières

Dans tout l'exposé, variété algébrique signifie schéma de type fini sur $\mathbf{C}$; par point on entend point fermé.
Soit X une variété projective lisse, de dimension n, munie d'un fibré très ample $\mathcal{O}(1)$.

1 Fibrés de Higgs : définition et propriétés

1.1 Fibrés harmoniques

On considère sur X un fibré vectoriel complexe E de classe C^∞, de rang r, muni d'une métrique hermitienne $<,>$; on désigne par $A^i(E)$ l'espace des formes différentielles de classe C^∞, de degré i à valeur dans E. Une connexion de classe C^∞ sur E est un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire $D : A^0(E) \to A^1(E)$ satisfaisant à la règle de Leibniz $D(fs) = (df)s + fDs,\ s \in A^0(E)$ et f fonction C^∞ sur X. Etant donnée une telle connexion D, on peut lui en associer une autre, notée $\check{D}$, de telle sorte que pour $s, t \in A^0(E)$ on ait :

$$d < s,t >=< Ds,t > + < s,\check{D}t >$$

où l'on a auparavant étendu le produit hermitien aux formes différentielles. Les connexions constituent un espace affine $\mathcal{A}$ modelé sur l'espace vectoriel $A^1(End(E))$ et l'application $D \mapsto \check{D}$ est une involution affine de $\mathcal{A}$ dont l'application linéaire tangente est donnée par $\omega \mapsto -\omega^*$, ou ω^* est la forme adjointe de ω.

La connexion est dite *hermitienne* si elle est invariante par cette involution. Toute connexion D s'écrit de manière unique $D = \nabla + \alpha$ où ∇ est une connexion hermitienne et α une forme différentielle de degré 1 à valeurs dans $End(E)$ telle que $\alpha = \alpha^*$. On peut alors décomposer ∇ et α selon leur type :

$$\nabla = \partial + \bar{\partial}\ ;\ \alpha = \theta + \theta^*$$

où ∂ et $\bar{\partial}$ sont de type (1,0) et (0,1) respectivement, et où θ est une forme différentielle de type (1,0) à valeur dans $End(E)$. A un tel couple (E, D) on associe l'opérateur différentiel $D'' : A^0(E) \to A^1(E)$ définie par $D'' = \bar{\partial} + \theta$.

Définition 1.1 (fibré harmonique) *On appelle* fibré harmonique *sur X un triplet $(E, D, <,>)$ formé d'un fibré vectoriel complexe de classe C^∞ de rang r muni d'une forme hermitienne $<,>$ et d'une connexion D telle que :*

1. *La connexion D est intégrable.*
2. *La forme différentielle $G \in A^2(End(E))$ (appellée* pseudo-courbure*) definie par $G = D''^2$ est nulle.*

On rappelle qu'une connexion est dite intégrable si la forme différentielle de courbure $F_D \in A^2(End(E))$, définie par $F_D = D^2$, est nulle. Au couple (E, D) est alors associé un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension r défini par le faisceau des sections locales annulées par D ; c'est aussi ce que l'on appelle un *fibré vectoriel plat* de rang r.

On peut remarquer que la seconde condition est équivalente à $\bar{\partial}^2 = 0$, $\bar{\partial}\theta = 0$ et $\theta \wedge \theta = 0$. Ainsi l'opérateur $\bar{\partial}$ définit sur E une structure de fibré vectoriel holomorphe, et θ est alors une forme différentielle holomorphe sur X, à valeur dans $End(E)$, satisfaisant à la condition $\theta \wedge \theta = 0$.

1.2 Fibrés de Higgs

1.2.1 Définition

Définition 1.2 (Fibrés de Higgs) *On appelle* fibré de Higgs *sur X la donnée d'un couple (E, θ), où E est un fibré vectoriel algébrique sur X, et θ une forme différentielle holomorphe de degré 1 à valeur dans $End(E)$, satisfaisant à l'identité : $\theta \wedge \theta = 0$.*

Remarque 1.1 *De façon algébrique, on peut considérer θ comme un morphisme $\theta : E \to \Omega^1(E)$.*

Puisque la variété est projective, en vertu des théorèmes de comparaison de Serre [Ser56], il revient au même de travailler avec les fibrés vectoriels algébriques ou les fibrés vectoriels holomorphes sur X ; et d'après un théorème de Newlander-Nirenberg, une structure holomorphe est équivalente à la donnée d'un opérateur $\bar{\partial}$ donc, on peut considérer que le $\bar{\partial}$ de la définition d'un fibré harmonique est toujours l'opérateur de Dolbeault.

1.2.2 Lien avec les fibrés harmoniques ; métriques de Yang-Mills

De façon évidente, et d'après ce qui précède, on associe à tout fibré harmonique un fibré de Higgs de classes de Chern nulles (un fibré harmonique est plat). Que peut-on dire alors de la réciproque ? Pour répondre à cette question, on va introduire la notion de *métrique de Yang-Mills* .

Si (E, θ) est un fibré de Higgs de rang r et $H = <, >$, une métrique hermitienne de forme de Chern ω sur E, il existe une unique connexion hermitienne ∇ sur E dont la partie de type (0,1) coïncide avec l'opérateur $\bar{\partial}$ de Dolbeault. On pose $\alpha = \theta + \theta^*$. Soit alors la connexion $D = \nabla + \alpha$. On note $F = D^2$ sa forme de courbure. Si on montre que cette forme est nulle, alors le fibré de Higgs provient d'un fibré harmonique. Bien entendu, si les classes de Chern sont quelconques, on ne peut espérer obtenir, par un choix convenable de H que la courbure F soit nulle. Cependant, on peut essayer de minimiser celle-ci. Pour la mesurer, on munit $End(E)$ de la métrique hermitienne $(f, g) \mapsto trace(fg^*)$ pour f et g dans une même fibre de $End(E)$. On note $f \mapsto |f|^2$ la forme quadratique associée. Après avoir étendu cette forme hermitienne aux formes différentielles, on définit la norme L^2 de la courbure par :

$$\|F\|^2 = \int_X |F|^2 \frac{\omega^n}{n!}$$

Par hypothèse, on dispose sur X d'un fibré très ample $\mathcal{O}(1)$; on désigne par h sa classe de Chern. Comme sur toute variété kählérienne on dispose sur l'algèbre des formes différentielles $A^*(X)$ des opérateurs (cf. [Wei58]) :

$$* : A^{p,q}(X) \to A^{n-p,n-q}(X)$$

qui vérifie $\forall \psi \in A^{n-p,n-q}(X),\ \eta \in A^{p,q}(X),\ z \in X$

$$< \psi(z), \eta(z) > \frac{\omega^n}{n!} = \psi(z) \wedge *\eta(z)$$

(où $<,>$ est étendu aux formes différentielles),

$$C : A^{p,q}(X) \to A^{p,q}(X)\ ;\ \psi \mapsto i^{p-q}\psi$$

$$L : A^{p,q}(X) \to A^{p+1,q+1}(X)\ ;\ \psi \mapsto \psi \wedge \omega$$

$$\Lambda : A^{p,q}(X) \to A^{p-1,q-1}(X)\ ;\ \text{tel que } \Lambda = L^*$$

au sens de l'adjoint pour la métrique.

On décompose la forme de courbure F de la connexion D associée sous la forme

$$F = \frac{1}{r} tr(F) id_E + F^\perp$$

où $tr(F)$ désigne la trace de F, et où $F^\perp$ est une forme différentielle de degré 2 à valeur dans $End(E)$ de trace nulle. On désigne par F_0 (resp. $F_0^\perp$) la *partie primitive* de F (resp. $F^\perp$), et on écrit la décomposition othogonale

$$F = F_0 + \frac{\omega}{n}\Lambda(F) \text{ (resp. } F^\perp = F_0^\perp + \frac{\omega}{n}\Lambda(F^\perp))$$

Enfin, soient c_i les classes de Chern de E.

Définition 1.3 (Métriques de Yang-Mills) *Une métrique hermitienne sur* (E, θ) *est dite de* Yang-Mills *si*

1. *la trace de* F *est harmonique*
2. $\Lambda(F^\perp) = 0$

Donc, dire que la métrique est de Yang-Mills signifie que la forme de courbure s'écrit

$$F = \mu\omega id_E + F_0$$

avec F_0 partie primitive de F et μ un réel. Dans l'espace des métriques hermitiennes, la fonctionnelle $\|F\|^2$ est minimum aux points correspondants aux métriques de Yang-Mills.

Les classes de Chern fournissent des contraintes topologiques qui limitent les valeurs possibles de $\|F\|$ comme le montre le

Lemme 1.1 *On a les formules*

$$(c_2 - \frac{c_1^2}{2}).h^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2}(\|F_0\|^2 - \frac{1}{n}\|\Lambda(F)\|^2)$$

$$(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2).h^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2}(\|F_0^\perp\|^2 - \frac{1}{n}\|\Lambda(F^\perp)\|^2)$$

Démonstration

cf. [Pot91a] □

On a alors la

Proposition 1.1 *Soit (E,θ) un fibré de Higgs sur X, muni d'une métrique de Yang-Mills.*

1. *On a :*

$$(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2).h^{n-2} \geq 0$$

2. *Si les classes de Chern c_1 et c_2 vérifient :*

$$c_1.h^{n-1} = 0 \ ; \ (c_2 - \frac{c_1^2}{2}).h^{n-2} = 0$$

alors la connexion associée D est plate. En particulier, toutes les classes de Chern sont nulles.

Démonstration

L'assertion 1 est évidente vu le lemme.
Pour l'assertion 2 on pourra regarder [Cor88, Sam86] □

Ceci répond partiellement à la question posée en début de section. On est ramené à étudier les

1.2.3 Fibrés de Higgs munis de métriques de Yang-Mills : caractérisation

On est amené à introduire la notion de *faisceau de Higgs* pour pouvoir bénéficier du formalisme de la géométrie algébrique, en particulier de la notion de pente.

Définition 1.4 (Faisceau de Higgs) *Un* faisceau de Higgs *de rang r sur X est un couple (E, θ) formé d'un faisceau algébrique cohérent E et d'un morphisme $\theta : E \to \Omega^1 \otimes E$ tel que $\theta \wedge \theta = 0$*

Bien entendu, un fibré de Higgs apparait alors comme un faisceau de Higgs localement libre (On peut voir le faisceau associé à un fibré comme le faisceau de ses sections régulières).

Définition 1.5 (Sous-faisceau de Higgs) *Un sous faisceau cohérent $E' \subset E$ d'un faisceau de Higgs (E, θ) sera dit sous-faisceau de Higgs si $\theta(E') \subseteq \Omega^1 \otimes E'$*

On rappelle que l'on définit, pour tout faisceau algébrique cohérent F sans torsion sur X, de rang r et de classes de Chern c_i, le *degré* et la *pente* par

$$\deg(F) = c_1.h^{n-1} \ ; \ \mu(F) = \frac{\deg(F)}{r}$$

Définition 1.6 (μ-(semi)stabilité) *On dit qu'un faisceau de Higgs (E, θ) est* μ-semistable *(resp.* μ-stable *) si pour tout sous-faisceau de Higgs E' de rang r', avec $0 < r' < r$, on a*

$$\mu(E') \leq \mu(E) \ ; \ (resp. <).$$

Le résultat fondamental de C.Simpson donne une caractérisation des fibrés de Higgs sur lesquels existent une métrique de Yang-Mills.

Théorème 1.1 (Simpson) *Soit (E, θ) un fibré de Higgs. Il existe sur (E, θ) une métrique de Yang-Mills si et seulement si E est somme directe de sous-fibrés de Higgs μ-stables de même pente μ (Simpson dit aussi* polystable *). Cette métrique est unique à automorphismes près.*

Démonstration
C'est un résultat mis en contexte dans [Sim92], démontré dans [Sim88]. Il suit en cela les différentes généralisation d'un résultat du à Narasimhan et Seshadri [NS65] par Donaldson [Don85, Don87a], Uhlenbeck et Yau [UY86] et Hitchin [Hit87]. □

1.3 Fibrés plats

1.3.1 Lien avec les fibrés harmoniques

A tout fibré harmonique $(E, D, <, >)$ on associe le fibré plat (E, D). On peut, réciproquement, se poser le même type de question que précédemment : Etant donné un fibré plat (E, D) sur la variété X, à quelle condition existe-t-il une métrique hermitienne $H =<, >$ sur E telle que le triplet (E, D, H) soit harmonique -ie que la pseudo-courbure soit nulle-? Une métrique sur un fibré plat de pseudo-courbure nulle est appellée *métrique harmonique*. En fait, on a le résultat suivant :

Lemme 1.2 (Siu, Sampson, Corlette, Deligne) *Soit E un fibré vectoriel sur X muni d'une connexion plate D. Une métrique hermitienne sur E est harmonique si et seulement si la pseudo-courbure G vérifie l'équation $\Lambda(G) = 0$.*

Démonstration

On peut voir une démonstration rapide dans [Sim92] p.17 ou dans [Pot91a] p.14 □

Ce lemme nous permet d'utiliser la terminologie de *métrique harmonique* pour désigner une métrique H de courbure nulle sur un fibré de Higgs. Notons que la notion de fibré de Higgs muni d'une métrique harmonique est identique à celle de fibré plat muni d'une métrique harmonique. Ainsi, un fibré harmonique est simplement un fibré qui possède les structures de fibré plat et de fibré de Higgs liées par une métrique harmonique.

Un fibré plat est dit *irréductible* s'il ne contient pas de de sous-fibré plat non nul de rang strictement infèrieur (La terminologie provient du fait qu'un fibré plat provient d'une représentation du groupe de Poincaré de X -à conjugaison près- et un irréductible provient d'une représentation irréductible). Une somme directe de fibrés plats irréductibles est dite *semi-simple.*

Théorème 1.2 (Donaldson, Corlette) *Il existe une métrique harmonique sur un fibré plat si et seulement si il est semi-simple. Cette métrique est unique à isomorphisme près.*

Démonstration

Cet énoncé se démontre par des méthodes voisines de celles du théorème 1.1. Il est la généralisation d'un résultat dû à Eells et Sampson [ES86] et on peut trouver deux démonstrations indépendantes dans [Cor88] et [Don87b] □

Les théorèmes 1.1 et 1.2 sont de même nature puisque donnant tous deux une caractérisation des structures de fibré harmonique sur des types de fibrés plus généraux. En fait, on peut suivre Simpson en disant qu'ils constituent un théorème de Hodge non abélien [Sim92].

1.3.2 Lien avec les fibrés de Higgs

Etant donné un fibré plat (E, D), on définit le complexe de De Rham $(A^{\cdot}(E), D)$:

$$0 \to A^0(E) \overset{D}{\to} A^1(E) \overset{D}{\to} \cdots$$

en prolongeant la connexion D aux formes différentielles ; sa cohomologie, notée $H^*_{DR}(E)$, s'identifie à la cohomologie (pour la topologie usuelle) de X à valeur dans le faisceau des sections localements plates de E.

De même, étant donné un fibré de Higgs (E, D''), on définit le complexe de Dolbeault $(A^{\cdot}(E), D'')$:

$$0 \to A^0(E) \overset{D''}{\to} A^1(E) \overset{D''}{\to} \cdots$$

sa cohomologie, notée $H^*_{Dol}(E)$, s'identifie à l'hypercohomologie de X à valeur dans le complexe $(\Omega^{\cdot}(E), \theta)$ des formes différentielles holomorphes à valeur dans E.

Lorsque l'on dispose d'un fibré harmonique, on peut à la fois considérer la cohomologie de De Rham et de Dolbeault. L'énoncé suivant généralise un énoncé classique en géométrie kählerienne :

Lemme 1.3 *Soit E un fibré harmonique. On a un isomorphisme canonique*

$$H^q_{DR}(E) \simeq H^q_{Dol}(E)$$

Démonstration

On trouvera la preuve, qui utilise le théorème de Hodge, dans [Pot91a, Sim92]
□

Si on considère E un fibré plat, il est clair qu'il existe une filtration

$$0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_l = E$$

telle que chaque $gr_i = E_i/E_{i-1}$ est un fibré plat irréductible, donc d'après le théorème 1.2, provenant d'un fibré harmonique.

Or si E' et E'' sont deux fibrés harmoniques, alors le fibré $Hom(E', E'')$ est aussi harmonique (en fait, la notion de fibré harmonique est fonctorielle et compatible avec le produit tensoriel et le passage au dual. Bien entendu, on entend ici par fibré un fibré muni d'une connexion et d'une métrique sachant que les fibrés produits et duaux héritent de ces structures de façon naturelle). L'identité déduite de l'application du lemme précédent sur ce fibré donne, pour $q = 0$, l'identité des morphismes plats et des morphismes de Higgs, pour $q = 1$, l'identité des extensions de fibrés de Higgs et les extensions de fibrés plats. Et plus généralement, nous permet de considérer la filtration ci-dessus comme filtration de fibrés de Higgs. Plus précisément on a le

Théorème 1.3 *La catégorie des fibrés plats est équivalente à celle des fibrés de Higgs possédant une filtration dont le gradué est somme directe de fibrés de Higgs μ-stables dont les classes de Chern satisfont aux conditions suivantes :*

$$c_1.h^{n-1} = 0 \ ; \ (c_2 - \frac{c_1^2}{2}).h^{n-2} = 0$$

En fait, on peut montrer que l'on obtient tous les fibrés de Higgs μ-semi-stables dont les classes de Chern vérifient les mêmes conditions. C'est ce qui va nous occuper dans la section suivante.

1.3.3 Résultats liés à la théorie de Mehta et Ramanathan

Il s'agit d'étendre les théorèmes de restrictions de Mehta et Ramanathan [MR82, MR84] aux fibrés de Higgs. Rappelons qu'étant donné un faisceau algébrique cohérent sans torsion F sur X on peut trouver une filtration de F :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = F$$

telle que

1. F/F_i est sans torsion
2. le gradué $gr_i = F_i/F_{i-1}$ est μ-semi-stable de pente μ_i strictement décroissante.

Cette filtration est unique et s'appelle la filtration de Harder-Narasimhan de F. Dans la suite on notera $\mu_{max}(F) = \mu_1$ et $\mu_{min}(F) = \mu_k$. Il résulte du théorème de restriction de Mehta et Ramanathan [MR82], que l'on peut choisir un entier d ausi grand que l'on veut, et une hypersurface lisse $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ telle que $F\mid_Y$ soit sans torsion et que la filtration de Harder-Narasimhan de $F\mid_Y$ coïncide avec $F_i\mid_Y$.

Etant donné un faisceau de Higgs (F,θ), avec F sans torsion, on peut encore définir une filtration comme ci-dessus, satisfaisant aux mêmes conditions et où l'on impose à F_i d'être un sous faisceau de Higgs, et où la semi-stabilité doit être prise au sens des faisceau de Higgs. Cette filtration est encore unique, et sera appellée filtration de Harder-Narasimhan du faisceau de Higgs (F,θ).

Etant donné un faisceau de Higgs (F,θ) et une sous-variété lisse Y de X, On définit un faisceau de Higgs $(F\mid_Y, \theta_Y)$ induit en considérant le morphisme composé

$$F\mid_Y \xrightarrow{\theta\mid_Y} \Omega^1_X\mid_Y \otimes F\mid_Y \rightarrow \Omega^1_Y \otimes F\mid_Y$$

L'énoncé qui suit étend aux faisceaux de Higgs le théorème classique de Mehta et Ramanathan :

Proposition 1.2 *Soient (F,θ) un faisceau de Higgs μ-semi-stable sur X, et d_0 un entier. Il existe un entier $d \geq d_0$ et une hypersurface $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ tels que $(F\mid_Y, \theta_Y)$ soit μ-semi-stable.*

Démonstration

On peut trouver des démonstrations de ce résultat dans [Pot91a] p.17 et [Sim92] p.38 □

Par des méthodes similaires à celles utilisées dans la démonstration du résultat précédent, on peut montrer le

Théorème 1.4 (Simpson) *Soit (F, θ) un faisceau de Higgs μ-semi-stable dont les classes de Chern vérifient*

$$c_1.h^{n-1} = 0 \ ; \ (c_2 - \frac{c_1^2}{2}).h^{n-2} = 0$$

Alors

1. *Le bidual F^{**} est localement libre et possède une filtration par des sous fibrés de Higgs dont le gradué est somme directe de fibrés de Higgs μ-stables de classes de Chern nulles.*

2. *le morphisme canonique $F \to F^{**}$ est un isomorphisme en dehors d'un fermé de codimension ≥ 3.*

Démonstration

Comme d'habitude on peut se reporter à [Pot91a] p.19 ou, pour avoir une démonstration plus détaillée à [Sim92] p.39 □

Evidemment, on peut déduire de ce résultat l'équivalence cherchée :

Corollaire 1.1 *Les catégories des fibrés plats et des fibrés de Higgs μ-semi-stables dont les classes de Chern vérifient :*

$$c_1.h^{n-1} = 0 \ ; \ (c_2 - \frac{c_1^2}{2}).h^{n-2} = 0$$

sont équivalentes.

Et, plus particulièrement,

Corollaire 1.2 *Un faisceau de Higgs μ-semi-stable, de classes de Chern nulles est localement libre et provient d'un fibré plat.*

2 Espaces de modules et équivalence de catégories

2.1 Rappels sur la théorie de l'invariance géométrique.

La référence constante dans cette section est évidemment [MF82].
Soient G un groupe réductif opérant linéairement sur un espace vectoriel W, $\mathbf{P}(W)$ l'espace projectif des droites de W, $A \subset \mathbf{P}(W)$ un sous-schéma fermé G-invariant.

Définition 2.1 (point-(semi-)stable) 1. *Un point $x \in A$ est dit* semi-stable *sous l'action de G s'il existe un polynôme homogène G-invariant sur W non nul en x. Les points semi-stables forment un ouvert A^{ss}.*

2. *Un point $x \in A$ est dit* stable *s'il est semi-stable et si le morphisme $G \to A^{ss}\ :\ g \mapsto gx$ est propre.*

On a la

Proposition 2.1 *Il existe une variété projective B et un morphisme $\pi : A^{ss} \to B$, G-équivariant et satisfaisant à la propriété universelle des quotients : pour tout morphisme G-équivariant $f : A^{ss} \to C$ dans une variété C, il existe un morphisme et un seul $g : B \to C$ tel que $g_\circ \pi = f$; de plus, cette propriété reste vraie par changement de base.*

Ce morphisme π est surjectif, affine, et envoie deux fermés G-invariants disjoints sur deux fermés disjoints. De plus, la réunion A^s des orbites des points stables est l'image réciproque d'un ouvert B^s de B.

Il existe un critère commode pour déterminer quels sont les points semi-stables et stables sous l'action de G. Soit $\lambda : \mathbf{C}^* \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G ; on peut alors écrire $W = \oplus_{n \in \mathbf{Z}} W_n$, où W_n est le sous-espace vectoriel des vecteurs $w \in W_n$ tels que $\lambda(t).v = t^n v$. Un point $x \in \mathbf{P}(W)$ se représente par un vecteur $v = \Sigma_n v_n$; soit $\mu(\lambda, x) = \inf\{n, v_n \neq 0\}$. On a alors l'équivalence :

$$x \textit{ est semi-stable (resp. stable)} \iff \forall \lambda,\ \mu(\lambda, x) \leq 0 \textit{ (resp. } < 0)$$

On peut, par exemple, utiliser ce résultat pour trouver les points semi-stables de la Grassmanienne $\mathbf{Gr} = Grass(H \otimes \mathbf{C}^r, s)$ des espaces vectoriels quotients K de dimension s de $H \otimes \mathbf{C}^r$ sous l'action de $SL(H)$: il s'agit des quotients de K satisfaisant à la condition suivante : pour tout sous-espace vectoriel H', l'image K' de $H' \otimes \mathbf{C}^r$ dans K vérifie l'inégalité

$$\frac{\dim K'}{\dim H'} \geq \frac{\dim K}{\dim H}.$$

2.2 Rappels sur le schéma de Hilbert.

Bien sûr, ici, la référence obligée est [Gro61] ; mais, [Pot91b] est d'un accès moins ardu.
On se fixe maintenant un module localement libre E sur X. On considère les $\mathcal{O}_X$-modules quotients $G = E/F$ de E, de polynôme de Hilbert P donné. On pose $A_k = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(k))$.

On désigne par $\mathbf{Hilb}^P(E)$ l'ensemble des faisceaux cohérents E/F quotients de E par un sous-faisceau F, de polynôme de Hilbert P. On se propose de mettre sur $\mathbf{Hilb}^P(E)$ une structure de variété projective.

Pour toute variété projective S, on désigne par $\underline{\mathbf{Hilb}}^P(E;S)$ l'ensemble des modules cohérents quotients $G = E_S/F$, plats sur S, et tels qu'en chaque point s de S le polynôme de Hilbert de $G(s)$ soit P.

Si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés algébriques, pour tout $G \in \underline{\mathbf{Hilb}}^P(E;S)$, l'image réciproque $(f \times id_X)^*(G)$ est un module cohérent sur $S' \times X$, S' plat ; ce qui définit une application

$$\underline{\mathbf{Hilb}}^P(E;S) \to \underline{\mathbf{Hilb}}^P(E;S') \ : \ G \mapsto (f \times id_X)^*(G)$$

On obtient ainsi, sur la catégorie des variétés algébriques, un foncteur contravariant.

Théorème 2.1 (Grothendieck) *Le foncteur $\underline{\boldsymbol{Hilb}}^P(E;S)$ est représentable par une variété algébrique projective $\boldsymbol{Hilb}^P(E)$.*

Démonstration

cf. [Gro61] ou [Pot91b] $\square$

Le théorème signifie que, si on pose $H = \mathbf{Hilb}^P(E)$, il existe sur $H \times X$ un module cohérent quotient $\mathcal{G} \in \underline{\mathbf{Hilb}}^P(E;H)$ induisant un isomorphisme fonctoriel

$$\begin{array}{ccc} Mor(S, \mathbf{Hilb}^P(E)) & \tilde{\to} & \underline{\mathbf{Hilb}}^P(E;S) \\ f & \mapsto & (f \times id_X)^*(\mathcal{G}) \end{array}$$

Scholie 2.1 *Pour ν assez grand, le morphisme*

$$i : \boldsymbol{Hilb}^P(E) \to \boldsymbol{Gr}^{P(\nu)}(H^0(E(\nu)))$$

qui associe au module quotient $G = E/F$ le sous espace $H^0(F(\nu))$ de codimension $P(\nu)$ dans $H^0(E(\nu))$ est un plongement.

2.3 Les espaces de modules

2.3.1 L'espace de modules des faisceaux cohérents

Un faisceau algébrique cohérent F est dit de dimension d si son support est de dimension d. Un tel faisceau est dit *équidimensionnel* de dimension d s'il n'a pas de sous-module cohérent de dimension $\leq d$. Pour $d = n$ il s'agit des faisceaux sans torsion ; pour $d = 1$ il s'agit des faisceaux de dimension un localement de Cohen-Macaulay. Le polynôme de Hilbert d'un faisceau algébrique cohérent F de dimension d peut s'écrire

$$P_F(m) = \chi(F(m)) = \sum_{i=0}^{d} C^i_{m+i-1}\chi_i$$

Le coefficient $r = \chi_d$ s'appelle la *multiplicité*. Dans le cas où F est sans torsion, on a $r = rg(F).deg(X)$; le nombre $\chi_{d-1}.deg(X)/r$ ne diffère de la pente que par une constante indépendante de F.

Définition 2.2 ((semi-)stabilité) *On dit qu'un faisceau algébrique cohérent est semi-stable (resp. stable) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *le faisceau F est équidimensionnel.*
2. *pour tout sous-module cohérent non nul $F' \subset F$ de multiplicité $r' < r$ on a*

$$\frac{P_{F'}}{r'} \leq \frac{P_F}{r} \ (resp. <)$$

où les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique sur les coefficients, en commençant par le terme de plus haut degré.

On définit de même la notion de μ-semi-stabilité (resp. μ-stabilité) en remplaçant le polynôme par le coefficient χ_{d-1}

Proposition 2.2 *On a les implications :*

$$\begin{array}{ccc} \text{stable} & \Rightarrow & \text{semi-stable} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mu\text{-stable} & \Rightarrow & \mu\text{-semi-stable} \end{array}$$

Fixons un polynôme Q de degré d, et considérons la catégorie $\mathcal{C}(Q)$ des faisceaux semi-stables F,de multiplicité r tels que $\frac{P_F}{r} = Q$. Cette catégorie est abélienne et, de plus, noethérienne et artinienne (par définition de la semi-stabilité). On peut alors y définir la notion de filtration de Jordan-Hölder (ie une filtration $0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = F$ telle que le gradué $gr_i(F) = F_i/F_{i-1}$ soit stable. L'entier k est appellé la longueur de la filtration).

Proposition 2.3 *Soit F un objet de $\mathcal{C}(Q)$. Toutes les filtrations de Jordan-Hölder sont de même longueur k ; de plus, si (F_i) et (F_i') sont deux filtrations de Jordan-Hölder de gradués respectifs $\oplus_i gr_i$ et $\oplus_i gr_i'$, il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$ telle que*

$$gr_i \simeq gr'_{\sigma(i)}.$$

En particulier, ces gradués sont isomorphes.

Démonstration

cf. [Pot91b] □

Le gradué $gr(F)$ étant alors bien défini à isomorphisme près, on peut définir une notion d'équivalence par :

Définition 2.3 (S-équivalence) *Deux faisceaux semi-stables sont dits* S-équivalents *si les gradués $gr(F)$ et $gr(G)$ sont isomorphes.*

Soit P un polynôme de degré d. On considère le foncteur $\underline{\mathrm{M}}_X(P)$ qui associe à la variété algébrique S l'ensemble $\underline{\mathrm{M}}_X(P)(S)$ des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux semi-stables sur X de polynôme de Hilbert P.

Théorème 2.2 *1. Il existe pour le foncteur $\underline{M}_X(P)$ un espace de modules grossier $M_X(P)$, dont les points sont les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert P.*

2. La variété algébrique $M_X(P)$ est projective.

3. Il existe un ouvert $M_X^s(P)$ de $M_X(P)$ dont les points correspondent aux classes d'isomorphisme de faisceaux stables.

La propriété de module grossier de $\mathrm{M}_X(P)$ signifie qu'il existe un morphisme fonctoriel $f : \underline{\mathrm{M}}_X(P)(S) \to Mor(S, \mathrm{M}_X(P))$ satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute autre variété algébrique N, et tout morphisme fonctoriel $g : \underline{\mathrm{M}}_X(P)(S) \to Mor(S, N)$ il existe un unique morphisme $\phi : Mor(S, \mathrm{M}_X(P)) \to Mor(S, N)$ tel que $g = \phi \circ f$.

Démonstration

Pour la démonstration de ce théorème de représentation, on a besoin du

Lemme 2.1 *La famille des faisceaux μ-semi-stables de polynôme de Hilbert donné est limitée.*

Démonstration

Considérons F comme un faisceau de modules sur le sous-schéma S de X défini par l'annulateur de F ; ce sous-schéma est équidimensionnel de dimension d et de degré borné. D'après Chow, la famille des sous-schémas ainsi obtenue est limitée.

On peut alors considérer, S étant fixé, une projection finie $\pi : S \to \mathbf{P}^d$ telle que $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^d}) = \mathcal{O}_S(1)$. Le faisceau $\pi_*(F)$ est alors un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^d}$-modules sans torsion de même polynôme de Hilbert que F. La pente des sous-modules de ce faisceau est majorée vu la semi-stabilité de F : la famille qu'ils constituent est donc limitée. La famille des faisceaux F est donc elle-même limitée $\square$

Revenons à la démonstration du théorème.
Choisissons un entier N assez grand pour que si $n \geq N$ on ait,

1. pour tout faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P, $F(n)$ est engendré par ses sections, et on a $H^q(F(n)) = 0,\ q > 0$ -par l'application des théorèmes de finitude de Serre à la famille limitée du lemme 2.1-

2. pour tout faisceau semi-stable F de multiplicité r, de polynôme de Hilbert $P_F = P$, et tout sous-module $F' \subset F$ non nul de multiplicité r'

$$\frac{h^0(F'(n))}{r'} \leq \frac{h^0(F(n))}{r}, \text{ et, en cas d'égalité } \frac{P_{F'}}{r'} = \frac{P_F}{r}.$$

(non évident)

Soit H un espace vectoriel complexe de dimension $P(N)$; on pose, pour tout entier $k \geq 0,\ A_k = H^0(\mathcal{O}_X(k))$. Considérons le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb} = \mathbf{Hilb}^P(H \otimes \mathcal{O}_X(-N))$. Pour k assez grand, ce schéma se plonge dans la grassmanienne $\mathbf{Gr} = \mathbf{Gr}(H \otimes A_k, P(N+k))$ (cf. le scholie 2.1) ; ceci définit une polarisation de $\mathbf{Hilb}$. Le groupe $SL(H)$ opère sur $\mathbf{Hilb}$ et sur $\mathbf{Gr}$; l'action provient de la représentation linéaire de $SL(H)$ dans $\Lambda^{P(N+k)}(H \otimes A_k)$, via le plongement de Plücker. En utilisant le critère de la section 2.1, on en déduit le

Lemme 2.2 *Pour une polarisation convenable de **Hilb**, on a l'équivalence, pour un point $F \in$ **Hilb***

1. *Le point F est semi-stable sous l'action de $SL(H)$*

2. *Pout tout sous-espace vectoriel non nul $H' \subset H$, on a, pour le sous-faisceau F' de F engendré par $H' \otimes \mathcal{O}_X(-N)$:*

$$\frac{P}{\dim H} \leq \frac{P_{F'}}{\dim H'}$$

On considére le quotient de Mumford $M' = \mathbf{Hilb}^{ss}/SL(H)$. A tout couple (F, α) formé d'un faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P et d'un isomorphisme $\alpha : H \simeq H^0(F(N))$, on associe un point de $\mathbf{Hilb}$. Si on désigne par F' le sous-faisceau de F engendré par un sous-espace non nul H' de H, on a alors $\dim H' \leq \dim H^0(F'(N))$, d'où il découle (vu ci-dessus) que

$$\frac{\dim H'}{r'} \leq \frac{\dim H}{r}, \text{ et, en cas d'égalité } \frac{P_{F'}}{r'} = \frac{P_F}{r}.$$

Il en résulte que

$$\frac{P}{\dim H} \leq \frac{P_{F'}}{\dim H'}$$

et donc, d'après le lemme 2.2, ceci signifie que le point défini par (F, α) appartient à l'ouvert $\mathbf{Hilb}^{ss}$. Il est clair que si l'on change l'isomorphisme α, on obtient un point dans la même orbite, et par suite le même point dans le quotient M'. Cette construction fournit un morphisme fonctoriel

$$\underline{\mathrm{M}}_X(P)(S) \to Mor(S, M')$$

Il nous faut alors essayer de trouver une réciproque : si l'entier N et la polarisation sont bien choisis, les points $F \in \mathbf{Hilb}^{ss}$ définissent des faisceaux semi-stables et le morphisme d'évaluation $H \to H^0(F(N))$ est un isomorphisme. La deuxième assertion est claire, mais la première n'est pas évidente. Il est possible, cependant, de prouver que les points $F \in \mathbf{Hilb}$ correspondant à des faisceaux semi-stables, et tels que le morphisme d'évaluation est un isomorphisme définissent un sous-schéma ouvert et fermé $\mathbf{M}^{ss}$ de $\mathbf{Hilb}^{ss}$, invariant par $SL(H)$. Le quotient de Mumford $M = M_X(P) = \mathbf{M}^{ss}/SL(H)$ a alors un sens ; c'est une variété projective dont on vérifie la propriété de module grossier. □

2.3.2 L'espace de modules de Dolbeault

De même que pour les faisceaux cohérents, on définit les notions de semi-stabilité et de stabilité pour les faisceaux de Higgs : un faisceau de Higgs (F, θ) de multiplicité r, de polynôme de Hilbert P_F est dit *semi-stable* (resp. *stable*) s'il est équidimensionnel, et que pour tout sous-module de Higgs non nul $F' \subset F$ de multiplicité r' on a

$$\frac{P_{F'}}{r'} \leq \frac{P_F}{r} \text{ (resp. } <)$$

On définit de même la notion de filtration de Jordan-Hölder et de S-équivalence.

On se limite, ici, au cas des faisceaux sans torsion ; leur polynôme de Hilbert est de degré n.

Définition 2.4 (Famille de faisceaux de Higgs) *Par* famille de faisceaux de Higgs, *de polynôme de Hilbert P, paramétrée par une variété algébrique S, on entend la donnée d'un faisceau algébrique cohérent F sur $S \times X$, et d'un morphisme $\theta : F \to \Omega^1_{S\times X/S} \otimes F$, induisant au dessus de chaque point $s \in S$ un faisceau de Higgs (F_s, θ_s) de polynôme de Hilbert P.*

On considère le foncteur $\underline{\mathrm{M}}_{Higgs}(P)$ qui associe à une variété S l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux de Higgs semi-stables sur X, de polynôme de Hilbert P, paramétrées par S. On a la généralisation suivante du théorème 2.2 :

Théorème 2.3 *Soit P un polynôme de degré n.*

1. *Il existe pour le foncteur $\underline{M}_{Higgs}(P)$ un espace de modules grossier, noté $M_{Higgs}(P)$, dont les points sont les classes de S-équivalence de faisceaux de Higgs semi-stables.*

2. *La variété $M_{Higgs}(P)$ est quasi-projective.*

3. *Il existe un ouvert de $M_{Higgs}(P)$ dont les points correspondent aux classes d'isomorphisme de faisceaux de Higgs stables.*

Démonstration

Cet énoncé est une conséquence du théorème 2.2. Considérons le fibré tangent $T(X)$, et le fibré en espaces projectifs associé (au sens de Grothendieck) $Z = \mathbf{P}(T(X) \oplus \mathcal{O}_X)$ on désigne par $\pi : Z \to X$ la projection canonique, et par D le diviseur à l'infini. Sur la variété Z, le fibré inversible $\pi^*(\mathcal{O}_X(a)) \otimes \mathcal{O}(D)$ est très ample si a est un entier assez grand. Quitte à changer la polarisation, on peut supposer $a = 1$ (On modifie le polynôme de Hilbert mais pas les notions de stabilité).

Lemme 2.3 *Il y a équivalence entre la catégorie des faisceaux de Higgs semi-stables sans torsion sur X, et celle des faisceaux semi-stables de dimension n sur Z, dont le support ne rencontre pas le diviseur à l'infini D.*

Démonstration

Soit $\mathcal{A} = SymT(X)$ l'algèbre symétrique associée au faisceau des champs de vecteurs $T(X)$; on a $T^*(X) = Spec\mathcal{A}$. Se donner un faisceau de Higgs sur X revient à se donner un $\mathcal{A}$-module cohérent ; à un tel module F, on associe un faisceau cohérent G sur $T^*(X)$ en posant

$$G = \pi^{-1}(F) \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{O}_{T^*}$$

Le support de G est propre au dessus de X ; si F est sans torsion, G est équidimensionnel de dimension n. Réciproquement, étant donné un tel module cohérent sur T^* on obtient un faisceau de Higgs sans torsion sur X en posant

$$F = \pi_*(G)$$

Les deux opérations sont inverses l'une de l'autre, laissent les polynômes de Hilbert inchangés et font correspondre les sous-modules de Higgs de F aux sous-modules cohérents de G. Par suite les notions de stabilité et de semi-stabilité se correspondent. D'où le lemme. $\square$

Les modules cohérents sur T^* dont le support est propre sur X peuvent être considérés comme des modules cohérents sur Z dont le support ne rencontre pas le diviseur à l'infini D. Il en résulte que si l'on considère l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathrm{M}_Z(P)$

des classes dont le support ne rencontre pas Z, on obtient une variété algébrique quasi-projective qui satisfait la propriété de module grossier demandée. On prend donc $\mathrm{M}_{Higgs}(P) = \mathcal{U}$. $\square$

Désignons par P_0 le polynôme de Hilbert de $\mathcal{O}_X$. Soit r un entier ; l'espace de modules $\mathrm{M}_{Higgs}(rP_0)$ contient comme sous-schéma à la fois ouvert et fermé les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de rang r de classes de Chern nulles.
Comme Simpson, on désignera par $\mathrm{M}_{Dol}(r)$ cette composante. On sait, vu le corollaire 1.2 que les points de cette composante sont en fait représentés par des sommes directes de fibrés de Higgs μ-stables de classes de Chern nulles.

2.3.3 L'espace de modules de De Rham

De même que précédemment, on veut construire une variété qui paramètre les fibrés plats sur X. Un tel fibré est un couple (E, D) formé d'un fibré vectoriel algébrique E et d'une connexion régulière $D : \Omega^0 \otimes E \to \Omega^1 \otimes E$ intégrable (ie $D^2 = 0$).

Remarque 2.1 *Si on désigne par J^1E le fibré des jets d'ordre 1, alors une connexion régulière s'identifie à un scindage de la suite exacte*

$$0 \to \Omega^1 \otimes E \to J^1E \to E \to 0$$

On peut alors regarder l'espace des connexions intégrables sur E comme un sous-schéma fermé de $Hom(J^1E, \Omega^1 \otimes E)$ dont les équations de définition traduisent les conditions de scindage et d'intégrabilité.

Lemme 2.4 *La famille des fibrés vectoriels algébriques sous-jacents aux fibrés plats de rang r est limitée*

Démonstration
Il suffit de démontrer que la famille des fibrés plats irréductibles est limitée. Soit (E, D) un tel fibré ; Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq k}$ la filtration de Harder-Narasimhan de E. et μ_i la pente de $gr_i = F_i/F_{i-1}$. La connexion induit un opérateur $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$F_i \to \Omega^1 \otimes E/F_i$$

non nul si $1 \leq i \leq k$ (sinon F_i sous-module invariant par D, donc localement libre d'après [Del70] théorème 2.23, ce qui définirait un sous-fibré plat, contrairement à l'hypothèse d'irréductibilité). On a alors $\mu_{min}(F_i) \leq \mu_{max}(\Omega^1) + \mu_{max}(E/F_i)$, donc $\mu_i - \mu_{i+1} \leq \mu_{max}(\Omega^1)$. Par suite, $\mu_{max}(E) - \mu_{min}(E) \leq r\mu_{max}(\Omega^1)$. Le polynôme de Hilbert étant fixé, une variante du lemme 2.1 permet de conclure. $\square$

Un fibré plat E sur X admet une filtration croissante par des sous-fibrés plats, tels que les quotients successifs $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soient irréductibles ; le gradué $gr(E) = \oplus_i gr_i$ est, à isomorphisme près, indépendant de la filtration.

Deux fibrés plats E et F sont dits *S-équivalents* si les fibrés plats semi-simples $gr(E)$ et $gr(F)$ sont isomorphes.

Soit r un entier, on considère, pour toute variété algébrique S, l'ensemble $\underline{\mathrm{M}}_{DR}(r)(S)$ des faisceaux algébriques cohérents F sur $S \times X$, munis d'une connexion "relative" $D : F \to \Omega^1_{S\times X/S} \otimes F$ intégrable et tels que toutes les fibres F_s pour $s \in S$ soient de rang r. On vérifie que $\underline{\mathrm{M}}_{DR}(r)$ vérifie les axiomes de foncteur.

Théorème 2.4 *1. Il existe pour le foncteur $\underline{M}_{DR}(r)$ un espace de modules grossier $M_{DR}(r)$ dont les points sont les classes de S-équivalence de fibrés plats.*

2. L'espace $M_{DR}(r)$ a une structure naturelle de variété quasi-projective.

3. Les classes d'isomorphisme de fibrés plats irréductibles s'identifient à un ouvert de $M_{DR}(r)$.

Démonstration

On ne donnera, ici encore, qu'une esquisse de démonstration.

Soient encore, $P = rP_0$, N un entier assez grand, et H un espace vectoriel complexe de dimension $P(N)$. Considérons l'ensemble des triplés (E, α, D), formés d'un fibré vectoriel algébrique E, d'un isomorphisme $\alpha : H \to H^0(E(N))$ et d'une connexion intégrable D sur E. On peut définir une variété algébrique quasi-projective relative

$$\mathbf{A} \to \mathbf{Hilb}(H \otimes \mathcal{O}(-N), P)$$

qui paramètre tous ces triplés. En effet, si on désigne par $\mathcal{D}$ l'algèbre des opérateurs différentiels scalaires sur X, $\mathcal{D}$ peut être muni de deux structures évidentes de $\mathcal{O}_X$-modules. La donnée d'une connexion intégrable sur E équivaut à celle d'une structure de $\mathcal{D}$-module : étant donné une telle structure, on retrouve la connexion D en posant $< Ds, \xi >= \xi.s$ pour tout champ de vecteur local ξ et toute section locale s de E ; la compatibilité avec le crochet fournit la règle de Leibniz et la condition d'intégrabilité.

Considérons le sous-$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{D}_i$ défini par les opérateurs différentiels d'ordre $\leq i$. Etant donné un $\mathcal{D}$-module E, on a un morphisme $\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} E \to E$, où on muni $\mathcal{D}_i$ de sa structure de $\mathcal{O}_X$-module à droite ; en composant avec le morphisme d'évaluation, ceci permet d'associer à tout point (E, α, D) de $\mathbf{A}$ un module quotient de $\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} (H \otimes \mathcal{O}_X(-N))$. On obtient ainsi un plongement

$$\mathbf{A} \to \mathbf{H}_i = \mathbf{Hilb}(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} (H \otimes \mathcal{O}_X(-N)), P)$$

Le groupe $SL(H)$ opère sur $\mathbf{H}_i$ et $\mathbf{A}$ est un sous-schéma localement fermé de $\mathbf{H}_i$ invariant par $SL(H)$. Le lemme 2.2 permet encore de déterminer (pour une polarisation convenable) l'ouvert $\mathbf{H}_i^{ss}$ des points semi-stables sous l'action de $SL(H)$: Simpson démontre ([Sim94]) que pour N suffisamment grand et $i \geq r$, on a $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{H}_i^{ss}$. On obtient alors un morphisme

$$\mathbf{A} \to \mathbf{H}_i^{ss}/SL(H)$$

Plus précisément, il montre que $\mathbf{A}$ est en fait l'image réciproque d'un sous-schéma localement fermé de $\mathbf{H}_i^{ss}/SL(H)$.

Ce sous-schéma satisfait à la propriété de module grossier demandée. $\square$

2.4 L'espace de modules de Betti.

Cet espace de modules, qui paramètre les représentations du groupe fondamental de X, se construit de façon plus directe.

Soit $x \in X$; le groupe fondamental $\pi = \pi_1(X, x)$ est un goupe de type fini ; par conséquent, on peut mettre sur l'espace des représentations $R = Hom(\pi, GL(r, \mathbf{C}))$ une structure naturelle de variété algébrique affine :

En effet, soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ un système de générateurs pour π ; le groupe π s'écrit $\mathcal{L}/N$, où $\mathcal{L}$ est le groupe libre à k générateurs et $\mathcal{N}$ le groupe des relations entre ceux-ci, qu'on supposera lui même engendré par l générateurs. On voit que l'application $R \to GL(r, \mathbf{C})^k$ définie par $\rho \mapsto (A_i = \rho(\gamma_i))_{1 \leq i \leq k}$ identifie R à la sous-variété fermée de $GL(r, \mathbf{C})^k$ définie par l'image réciproque de l'élément neutre de $GL(r, \mathbf{C})^l$ par le morphisme $GL(r, \mathbf{C})^k \to GL(r, \mathbf{C})^l$ associé aux relations (On vérifie que la structure ainsi définie est indépendante de la présentation de π).

Sur la variété R, le groupe $GL(r, \mathbf{C})$ agit par conjugaison, et puisque ce groupe est réductif, le théorème de Hilbert implique que l'algèbre des invariants $\mathcal{O}(R)^{GL(r,\mathbf{C})}$ est de type fini, ce qui définit une variété affine

$$\mathrm{M}_B(r) = R/GL(r, \mathbf{C})$$

L'ensemble des points fermés de $\mathrm{M}_B(r)$ correspond à l'ensemble des orbites fermées de $GL(r, \mathbf{C})$: on vérifie que ces orbites sont celles des représentations semi-simples. L'inclusion $\mathcal{O}(R)^{GL(r,\mathbf{C})} \hookrightarrow \mathcal{O}(R)$ définit un morphisme $R \to \mathrm{M}_B(r)$ qu'on peut décrire de la manière suivante : toute représentation ρ a une filtration $\rho_1 \subset \ldots \subset \rho_k = \rho$ telle que $gr_i(\rho) = \rho_i/\rho_{i-1}$ soit irréductible ; on associe à ρ le point définit par la représentation semi-simple $gr(\rho) = \oplus_{i=1}^k gr_i(\rho)$.

Remarque 2.2 *Cet espace de modules pourrait se définir sur un espace topologique quelconque pourvu que son groupe de Poincaré soit de type fini.*

2.5 Comparaison des espaces de modules.

Le but initial était de chercher une généralisation des résultats de Narasimhan et Seshadri pour les représentations linéaires (et non plus seulement unitaires) du groupe de Poincaré de la variété X. Pour ce faire, on peut se limiter à l'étude des représentations irréductibles -a fortiori semi-simples-. En particulier, si on trouve une catégorie d'objets "représentable" (ie un foncteur représentable associé aux familles d'objets de la catégorie -famille au sens traditionnel en géométrie algébrique-) par un espace de modules ayant même ensemble de points fermés, alors on déduit l'équivalence cherchée.

En fait, pour r fixé, les trois espaces de modules, $\mathrm{M}_{Dol}(r)$, $\mathrm{M}_{DR}(r)$ et $\mathrm{M}_B(r)$ ont cette propriété comme le montre le

Théorème 2.5 (Simpson) *1. On a un isomorphisme*

$$M_B^{an}(r) \cong M_{DR}^{an}(r)$$

où $M_{\cdot}^{an}(.)$ est l'espace analytique complexe sous-jacent de l'espace de module considéré. Cette correspondance est dite de Riemann-Hilbert.

2. Pour la topologie usuelle, les espaces $M_B(r)$ et $M_{Dol}(r)$ sont homéomorphes.

Démonstration

La preuve se trouve dans [Sim94] tome II pp 25-38.

Pour établir la correspondance de Riemann-Hilbert l'idée est la suivante : A tout fibré plat (E, D) de rang r on associe le faisceau $\mathcal{F} = E^D$ des sections e de E telles que $D(e) = 0$. On montre ([Sim94] lemme 7.7) que ce faisceau est localement libre de rang r. Ensuite, si x est le point de X pris pour base des lacets, on regarde la *monodromie* du fibré $\mathcal{F}$ qui est une représentation de π à valeur dans $Aut(\mathcal{F}_x)$. Or $\mathcal{F}_x \cong \mathbf{C}^r$, on peut ainsi associer à (E, D) une repésentation linéaire de π modulo l'action de $GL(r, \mathbf{C})$.

Cette construction donne l'application de Riemann-Hilbert ; pour établir l'isomorphisme, on vérifie que les deux espaces représentent un même foncteur.

La preuve de la seconde partie du théorème consiste, en fait, à démontrer que $\mathrm{M}_{DR}^{top}(r) \cong \mathrm{M}_{Dol}^{top}(r)$ (Où *top* désigne l'espace topologique sous-jacent). En fait, on utilise ici les résultats de la première partie et plus précisément du corollaire 1.2 qui donne un isomorphisme entre l'ensemble des points fermés de $\mathrm{M}_{DR}(r)$ et celui de $\mathrm{M}_{Dol}(r)$. Ce seul résultat implique l'existence de l'homéomorphisme. $\square$

Conclusion

L'étude précise de ces correspondances n'est pas encore achevée. En effet, Simpson a démontré, dans [Sim91], que la correspondance de Riemann-Hilbert ne pouvait être algébrique mais n'a pas élucidé en détail le comportement à l'infini de celle-ci. Cette étude pourrait s'appuyer sur des travaux concernant les possibles compactifications des espaces de modules en question ; c'est pourquoi C.Simpson a accepté de me diriger sur une thèse qui porterait sur ce sujet.

Références

[Cor88] K. Corlette. Flat G-bundles with canonical metrics. *J. Diff. Geometry*, 28:361–382, 1988.

[Del70] P. Deligne. *Equations différentielle à points singuliers réguliers*. Number 163 in Lecture Notes in Maths. Springer-Verlag, 1970.

[Don83] S.K. Donaldson. A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri. *J. Differential Geom.*, 18:269–277, 1983.

[Don85] S.K. Donaldson. Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles. *Proc. London Math. Soc.*, 50(3):1–26, 1985.

[Don87a] S.K. Donaldson. Infinite determinants, stable bundles and curvature. *Duke Math. Journal*, 54.1:231–247, 1987.

[Don87b] S.K. Donaldson. Twisted harmonic maps and self-duality equations. *Proc. London Math. Soc.*, 55:127–131, 1987.

[ES86] J. Eells and J.H. Sampson. Harmonic mappings of riemannian manifolds. *Amer. J. of Math.*, 86:109–160, 1986.

[Gro61] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : les schémas de hilbert. *Séminaire Bourbaki*, 221, 1960-61.

[Hit87] N.J. Hitchin. The self-duality equations on a Riemann surface. *Proc. London Soc.*, 55(3):59–126, 1987.

[MF82] D. Mumford and J. Fogarty. *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag, 1982.

[MR82] V.B. Metha and A. Ramanathan. Semistables sheaves on projectives varieties and their restriction to curves. *Math. Annalen*, 258:213–224, 1982.

[MR84] V.B. Metha and A. Ramanathan. Restriction of stable sheaves and representation of the fundamental group. *Invent. Math.*, 77:163–172, 1984.

[NS65] M.S. Narasimhan and C.S. Seshadri. Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces. *Ann. of maths*, 82:540–567, 1965.

[Pot91a] J. Le Potier. Fibrés de Higgs et systèmes locaux. *Séminaire Bourbaki*, 737, Fevrier 1991.

[Pot91b] J. Le Potier. Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques. Cours de DEA, Université Paris 7, 1991.

[Sam86] J.H. Sampson. Applications of harmonic maps to Kähler geometry. *Contemp. Math.*, 49:125–133, 1986.

[Ser56] J.P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Annales de l'institut Fourier*, 1956.

[Sim] C.T. Simpson. Non abelian Hodge theory. Preprint, Princeton University.

[Sim88] C.T. Simpson. Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization. *Journal of the A.M.S*, 1:867–918, 1988.

[Sim91] C.T. Simpson. *Asymptotic behavior of monodromy.* Number 1502 in Lecture notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1991.

[Sim92] C.T. Simpson. Higgs bundles and local systems. *Publications Mathématiques IHES*, 75, 1992.

[Sim94] C.T. Simpson. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I et II. *Publications Mathématiques IHES*, 79 et 80, 1994.

[UY86] K.K Uhlenbeck and S.T. Yau. On the existence of hermitian Yang-Mills connections in stable vector bundles. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 39-S:257–293, 1986.

[Wei58] A. Weil. *Variétés kählériennes.* Hermann, 1958.