Exposé première année MMFAI 1994.
Groupes de Tresses et Invariants de Noeuds.

JEAN-MARIE LAPEYRE ET PHILIPPE MARCHAL
Responsable : R. Rouquier

1er Juin 1994

1 Motivations.

Pourquoi donc s'intéresser aux nœuds? Mis à part le caractère ludique que l'on peut leur attribuer, quel est le réel interêt de ces objets en Mathématique et plus généralement en Sciences? La structure combinatoire de tels objets a été étudiée dès le XIXème siècle par Tait, Thompson et Cayley. Mais l'arrivée de la topologie au début de ce siècle a permis de donner une base rigoureuse à de tels travaux.

C'est en 1925 qu'Émile Artin fonde la théorie "algébrique" des tresses ; La définition couramment admise aujourd'hui du groupe de tresses B_n a été introduite par Neuwirth et Fox en 1962, en utilisant des outils de la topologie algébrique. Mais les groupes de tresses restaient une curiosité isolée avant 1970. On a decouvert depuis que les structures profondes des nœuds sont très répandues en Mathématique et en Physique :

1. Arnold a trouvé de tels groupes dans son étude des singularités.

2. Vers 1968, ont été introduites sous le nom d'algèbres de Hecke des déformations de l'algèbre $\mathbf{CS}_n$ du groupe symétrique qui jouent un rôle important dans l'étude des représentations linéaires des groupes finis simples. Or les représentations de telles algèbres fournissent de nouvelles représentations du groupe de tresses et, par là même la construction du polynôme de Jones associé à un nœud.

3. En mécanique statistique, on a récemment découvert l'importance de la relation de Yang-Baxter dont une des formes

$$\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}$$

   est très proche de l'une des relations qui servent de définition à B_n.Toute solution de cette équation fournit automatiquement une représentation de ce groupe ; or les modèles mécaniques fournissent de telles solutions.

4. L'étude des "groupes quantiques" est elle aussi très proche de l'étude de l'équation de Yang-Baxter, et donc de la théorie des nœuds.

5. La théorie quantique des champs fait intervenir les représentations du groupe de tresses dans une construction récente de modèles à deux ou trois dimensions.

6. Enfin, en théorie des nombres on montre que l'on peut définir un homomorphisme injectif de Gal($\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$) sur le complété profini du groupe de tresses $\hat{B}_n$; Or une conjecture -fondamentale- est de déterminer si tout groupe fini G est le groupe de Galois d'une extension finie du corps $\mathbf{Q}$; or cela revient à étudier la structure de Gal($\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$)...

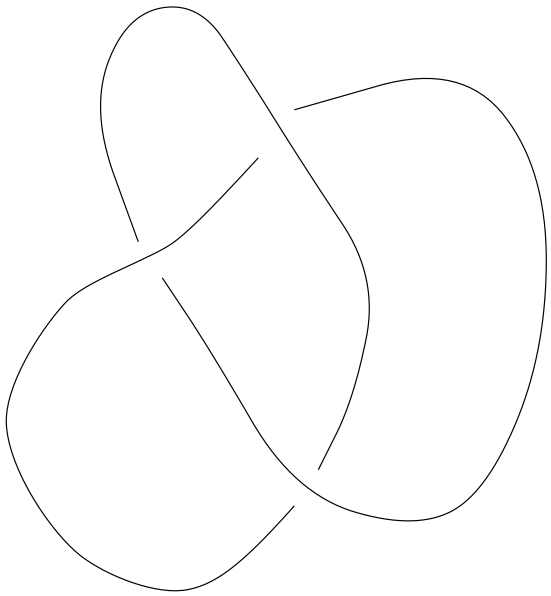
2 Nœuds, tresses et groupes de tresses.

2.1 Approche Topologique.

On peut donner les définitions élémentaires suivantes :

Définition 2.1 *On appelle nœud dans l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^3$ toute partie fermée de $\boldsymbol{R}^3$ homéomorphe au cercle $\boldsymbol{S}^1$.*
Un entrelac est la réunion d'un nombre fini de nœuds deux à deux disjoints.

Voici un exemple de nœud :



Il est commode de rajouter un point à l'infini à $\mathbf{R}^3$ et de raisonner dans l'espace $\mathbf{S}^3$ obtenu. Nous orientons l'espace $\mathbf{S}^3$ ainsi que les nœuds et entrelacs considérés.

Définition 2.2 *On dira que deux entrelacs L et L' sont équivalents s'il existe un homéomorphisme de $\boldsymbol{S}^3$ transformant L en L' en respectant les orientations de L, L' et $\boldsymbol{S}^3$*

Le groupe des homéomorphismes orientés de $\mathbf{S}^3$ sera muni de la convergence uniforme. On notera I=[0,1].

Définition 2.3 *On appelle isotopie transformant L en L' une application continue $h\ :\ I \times \boldsymbol{S}^3 \ \rightarrow\ \boldsymbol{S}^3$ avec les propriétés suivantes :*

1. *on a h(0,x) = x pour x dans $\boldsymbol{S}^3$*
2. *pour tout t dans I, l'application $h_t : x \mapsto h(t,x)$ est un homéomorphisme de $\boldsymbol{S}^3$*
3. *L' est l'image de L par l'application h_1*

Par suite, si deux entrelacs L et L' sont équivalents, il existe une isotopie transformant L en L'.

Remarque 2.1 *Une déformation de L en L' au moyen d'une famille continue d'entrelacs donnerait une équivalence trop faible.*

Ces définitions reflètent l'intuition que l'on a des noeuds mais elles peuvent être aisément généralisées aux dimensions supèrieures. Pour ce faire on va introduire la notion de tresse, vue comme "trajectoire" de points dans une variété. On introduira du même coup la notion de groupe de tresse.

Soit M une variété de dimension supèrieure ou égale à deux, et définissons

$$F_{0,n}M = \{(z_1, \cdots, z_n) \in M^n / z_i \neq z_j \ i \neq j\}$$

Définition 2.4 (Groupe de tresses pures) *On appelle groupe de tresses pures à n brins de la variété M le groupe fondamental $\pi_1 F_{0,n}M$ de $F_{0,n}M$ noté P_nM.*

Deux points z et z' de $F_{0,n}M$ sont dits équivalents si les coordonnées de z et de z' diffèrent par une permutation. Soit $B_{0,n}M$ l'espace quotient de $F_{0,n}M$ par cette équivalence.

Définition 2.5 (Groupe de tresses) *On appelle groupe de tresses à n brins de M le groupe fondamental $\pi_1 B_{0,n}M$ de $B_{0,n}M$ noté B_nM.*

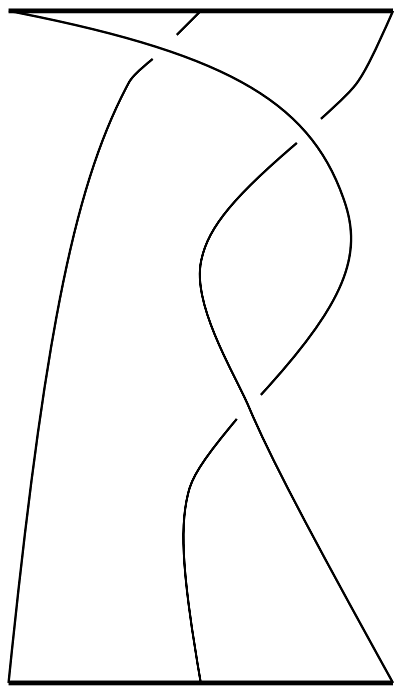
La définition classique du groupe de tresses donnée par Artin correspond ici à B_nE^2 où E^2 est le plan euclidien. On notera par la suite B_n pour B_nE^2 et P_n pour P_nE^2. De même, on notera $B_{0,n}$ pour $B_{0,n}E^2$ et $F_{0,n}$ pour $F_{0,n}E^2$. La définition géométrique des tresses d'Artin peut-être retrouvée à partir de la construction suivante :

Choisissons un point base $z^0 = (z_1^0, \cdots, z_1^0) \in F_{0,n}E^2$ et soit $\tilde{z^0}$ sa classe dans $B_{0,n}E^2$. Tout élément de B_n est représenté par un lacet $\tilde{f}$, à valeur dans $B_{0,n}E^2$ de base $\tilde{z}_0$, qui se relève en un chemin f, à valeur dans $F_{0,n}E^2$, d'origine z_0.

Si $f(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))$, $t \in I$ alors chacune des coordonnées définit (par son graphe) un arc $\Gamma_i = (f_i(t), t)$ $t \in I$. Vu la définition de $F_{0,n}E^2$ les arcs Γ_i sont disjoints.

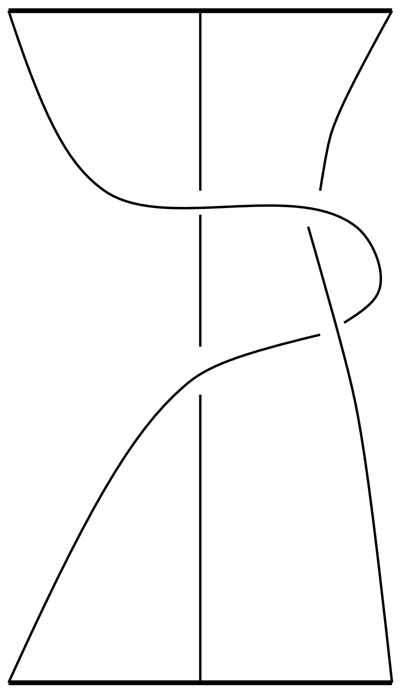
Définition 2.6 *L'union $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$ est appellée tresse géométrique à n brins.*

Exemple de tresse géométrique :



On définit de même les *tresses pures géométriques.*

Exemple de tresse pure géométrique :



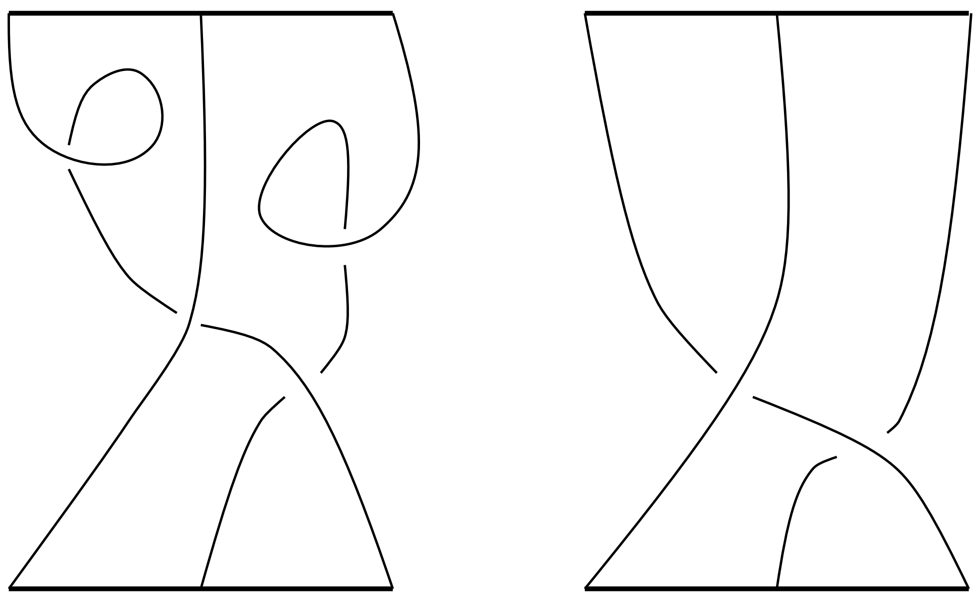
Ainsi, si Γ et Γ' sont des tresses alors on écrira $\Gamma \sim \Gamma'$ (ie représentent le même élément du groupe fondamental) si les lacets qui définissent ces tresses sont homotopes dans $B_{0,n}M$.

On peut définir une autre équivalence par : $\Gamma \approx \Gamma'$ si et seulement si Γ et Γ' se déforment l'une dans l'autre par une isotopie. On a le

Théorème 2.1 (Artin) *Les deux équivalences sont identiques.*

Preuve - Voir [3].

Ce résultat donne une base à l'intuition géométrique de tresse qui est celle de fils fixés à leurs deux extrémitées et enlacés, telle celle qui conduit à penser que les deux figures suivantes sont équivalentes :



On retrouvera le même phénomène un peu plus tard avec les mouvements de Reidemaster sur les nœuds.

On peut encore généraliser l'approche :
Etant donnée une variété M, soit Q_m un sous ensemble de M à m éléments. On donne la

Définition 2.7 *L'espace de configuration $F_{m,n}$ est par définition l'espace $F_{0,n}(M - Q_m)$.*

On définit de même $B_{m,n}M$.

Théorème 2.2 *Les espaces ainsi définis ne dépendent pas de l'ensemble Q_m.*

Puisqu'il existe toujours une isotopie de M qui transforme m points de M en m autres points.

On peut alors reprendre l'étude dans de tels espaces. Dès à présent, nous nous limiterons à l'étude des surfaces. Ici, les groupes P_n et B_n ont une place centrale. En effet, vu que $\dim M = 2$ on peut voir E^2 comme un disque ouvert de M contenant les points bases ainsi que l'ensemble Q_m. Ainsi, $F_{m,n}E^2$ peut être identifié à un sous ensemble de $F_{m,n}M$; Soit $i^*_{M,m,n}$ l'application induite sur les groupes fondamentaux.

Théorème 2.3 *Si M est une surface compacte différente de $\boldsymbol{S}^2$ et $\boldsymbol{P}^2$ alors* $\ker i^*_{M,0,n} = \{1\}$

Preuve - Voir [9].

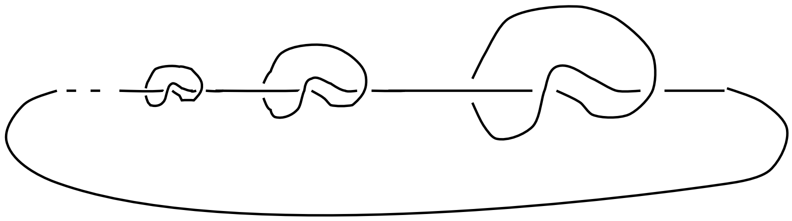
Donc, on se limitera par la suite au cas du plan ; on retrouvera alors un cadre naturel à l'étude des nœuds de $\mathbf{R}^3$. Signalons toutefois le :

Théorème 2.4 (Goldberg) *Si M est une surface fermée différente de $\boldsymbol{S}^2$ et $\boldsymbol{P}^2$ et $j : F_{0,n}M \longrightarrow M^n$ l'inclusion canonique Alors la suite suivante est exacte :*

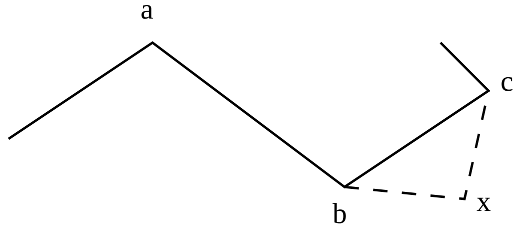
$$1 \longrightarrow P_n \xrightarrow{i^*_{M,0,n}} \pi_1 F_{0,n}M \xrightarrow{j_*} (\pi_1 M)^n \longrightarrow 1$$

Preuve - Voir [9].

Revenons-en donc aux nœuds.
Déjà, il convient de signaler qu'il existe des nœuds sauvages découverts par Fox et Artin :

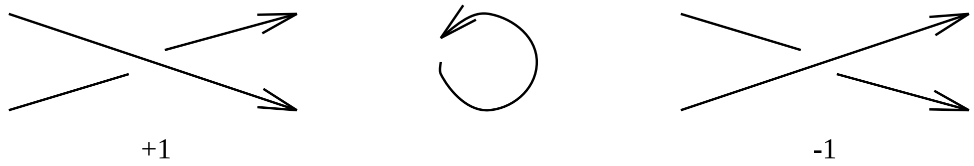


Pour les éviter, nous ne considèrerons que les nœuds qui sont équivalents à des lignes polygonales. De même pour les entrelacs. On peut montrer que si deux nœuds polygonaux L et L' sont équivalents, on peut passer de l'un à l'autre par des opérations élémentaires du type écrit ci dessous, et leurs inverses, en nombre fini :

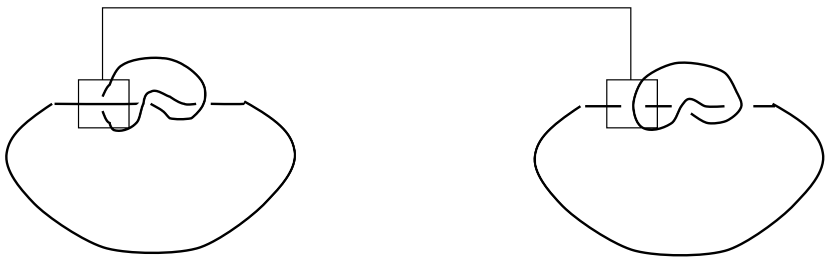


La modification remplace le segment bc par la réunion de bx et xc.

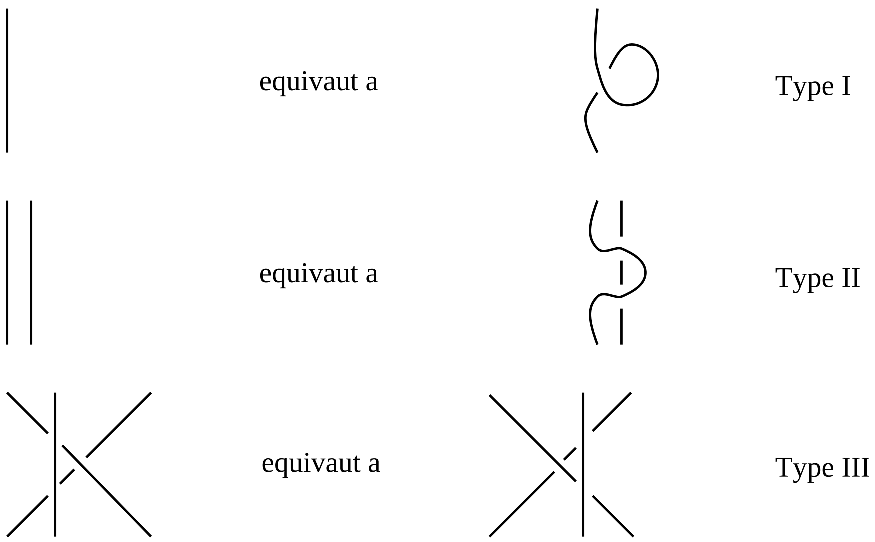
Pour décrire les nœuds, on utilise une projection plane. Quitte à remplacer un entrelac L par un entrelac équivalent, on peut supposer que la projection orthogonale de L sur un plan P est une réunion de courbes différentiables, avec pour seules singularités des points de croisement doubles avec tangentes distinctes. A chaque croisement, on doit indiquer laquelle des deux branches est au-dessus de l'autre ; compte tenu des orientations, on a les deux dispositions suivantes :



On a indiqué l'indice du croisement égal à +1 ou -1. Sur l'exemple suivant, il devient clair que ces croisements sont non équivalents, même en changeant de projection :



A une telle projection, on associe un graphe planaire tels ceux représentés plus haut. En général, le même entrelac a plusieurs projections non équivalentes par une isotopie du plan ; On peut prouver que l'on peut passer d'une projection à une autre, à une isotopie près, d'un même nœuds par une suite finie de *transformations de Reidemeister*, qui se répartissent en trois classes :



En fait, ces transformations sont des invariants naturels des brins de tresses ; Il est donc naturel de penser que l'on peut associer tresses de $\mathbf{R}^3$ et entrelacs (donc aussi nœuds).

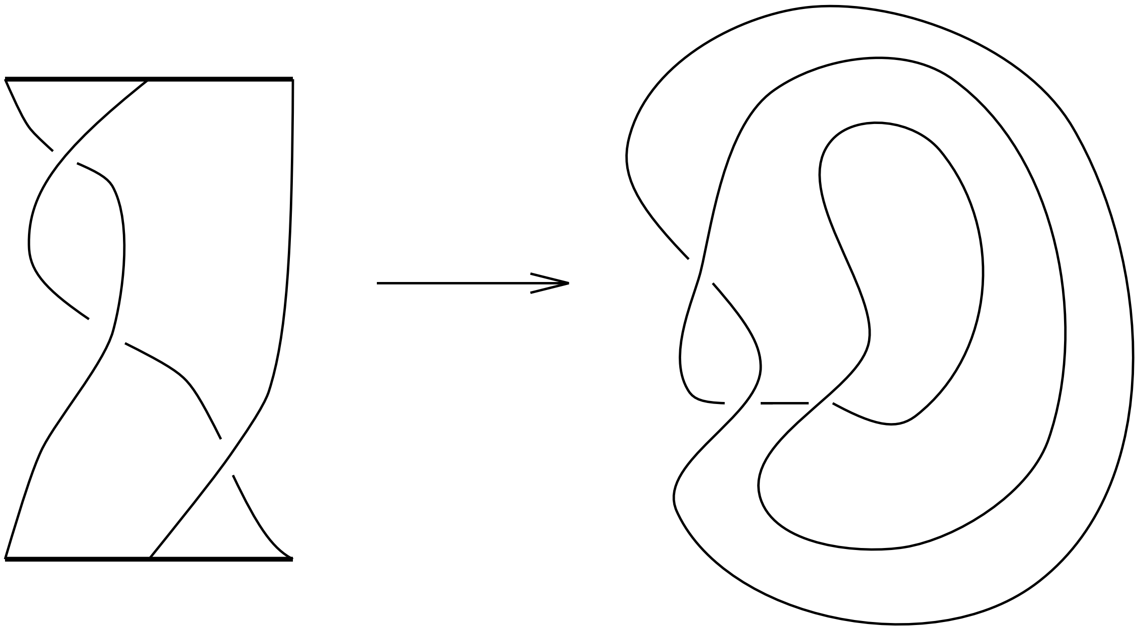
Théorème 2.5 (Alexander) *Tout entrelac de $\boldsymbol{R}^3$ peut être représenté par une paire (b, n) où b est un représentant d'une classe dans B_n. L'entrelac est obtenu en fermant b ie en reliant les points bases origines, aux points bases extrémités.*

Preuve - Voir [1].

Ce dernier théorème donne le moyen de passer d'une tresse à un entrelac quelconque. Voyons donc comment faire le passage inverse : Soit D une droite dans $\mathbf{R}^3$. Un entrelac L qui ne rencontre pas D sera appelé une *tresse fermée à n brins*, d'axe D, si tout demi-plan limité par D rencontre L en n points exactement. Choisissons un demi-plan P_0 limité par D, et notons P_t pour $0 \leq t \leq 1$ le demi-plan obtenu par la rotation ρ_t d'angle $2\pi t$ autour de D (après un choix d'orientations). Posons

$$F_t = \rho_t^{-1}(P_t \cap L)$$

Alors la famille $(F_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est un lacet dans $F_{0,n}$ et définit donc un élément du groupe de tresses B_n. On met ainsi en évidence une bijection entre les tresses fermées à n brins (à isotopie près) et les classes de conjugaison dans B_n. Or le théorème d'Alexander implique que tout entrelac est équivalent à une tresse fermée. On en déduit la classification de Markov des nœuds (Voir plus bas pour des détails).



On va donc étudier les groupes B_n et P_n qui élucident totalement la structure des tresses, et donc, vu les propriétées ci-dessus, celle des entrelacs.

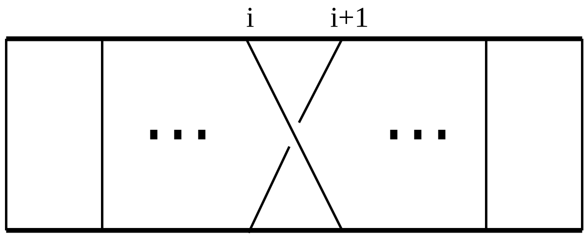
2.2 Approche algébrique.

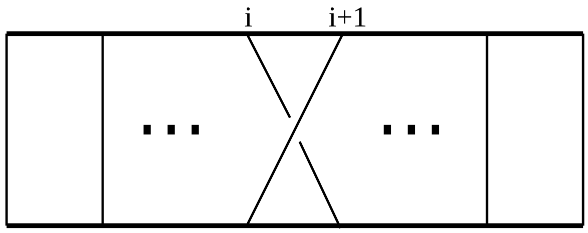
Notons Σ_n le groupe symétrique d'ordre n.

Théorème 2.6 *La projection canonique* $p : F_{0,n}M \to B_{0,n}M$ *est un revêtement galoisien de groupe d'automorphisme* Σ_n

Preuve - Voir [5].

L'interprétation géométrique du produit de deux tresses est immédiate, il suffit, avec les représentations utilisées ici de "concaténer" deux diagrammes de tresses pour obtenir le diagramme du produit. L'intuition géométrique suggère que toute tresse du plan s'écrit comme le produit de tresses élémentaires telles :





Les classes de ces éléments seront notées σ_i et σ_i^{-1}. (Notations cohérentes vu que $\sigma_i\sigma_i^{-1}$ est isotope à la tresse triviale). Précisément, dans B_n, σ_i est la tresse qui "twiste" le brin i et le brin i+1, le brin [i,i+1] passant "au dessus" du brin [i+1,i], et donc σ_i^{-1} faisant le même "twist" avec une disposition des brins inversée.

De même, les relations suivantes sont faciles á voir :

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ \ si \ |i-j| \geq 2, \ \ 1 \leq 1, \ j \leq n-1 \tag{1}$$
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \ \ 1 \leq i \leq n-2 \tag{2}$$

Ces notations étant fixées, on peut reprendre la description de la classification de Markov des nœuds :

Si B est l'ensemble somme des ensembles $B_1, B_2, \cdots$ et $\cong$ la plus petite relation d'équivalence dans B pour laquelle on ait :

$$g \cong hgh^{-1} \qquad g \cong g\sigma_n \cong g\sigma_n^{-1} \qquad g, h \in B_n$$

Alors, l'ensemble M des classes d'équivalence classifie les nœuds à isotopie près dans $\mathbf{R}^3$. Dans la suite, on s'interressera donc seulement aux tresses fermées (puisqu'elles représentent tous les entrelacs) et on adoptera la convention d'écriture suivante : si $\hat{\beta}$ est une telle tresse, représentée par $\beta \in B_n$, on notera (β, n) cette dernière.

Revenons-en à l'étude du groupe de tresses.

Théorème 2.7 (Artin) *Le groupe B_n admet une représentation avec générateurs $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ vérifiant les relations (1) et (2).*

Preuve - Soit G_n le groupe abstrait définit par générateurs et relations. Pour éviter des confusions on notera $g_1, \cdots, g_{n-1}$ les générateurs de G_n et $\iota \ : \ G_n \ \rightarrow \ B_n$ définie par

$$\iota(g_i) = \sigma_i \ \ 1 \leq i \leq n-1$$

On va utiliser la projection $p \ : \ F_{0,n} \rightarrow B_{0,n}$: Choisissons $p((1,0), \cdots, (n,0)) = \tilde{z^0}$ comme point base du groupe B_n. Relevons les lacets de $B_{0,n}$ basés en $\tilde{z^0}$ en des chemins de $F_{0,n}$ d'origine $((1,0), \cdots, (n,0)) = z_0$. Alors σ_i est représenté par le chemin f définit par

$$f(t) = ((1,0), \cdots, (i-1,0), f_i(t), f_{i+1}(t), (i+2,0), \cdots, (n,0)),$$

où $f_i(t) = (i+t, -\sqrt{t-t^2})$ et $f_i(t) = (i+1-t, \sqrt{t-t^2})$. La preuve va se faire par récurrence sur n.

Soit $\tilde{\nu} : \pi_1(B_{0,n}, \tilde{z^0}) \to \Sigma_n$ définie comme suit : Soit $\tilde{\alpha} \in B_n$ représentée par le lacet $\tilde{\varphi}$ qui se relève en un chemin φ. On pose :

$$\tilde{\nu}(\tilde{\alpha}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(0), \cdots, \varphi_n(0) \\ \varphi_1(1), \cdots, \varphi_n(1) \end{pmatrix} \in \Sigma_n$$

Le noyau du morphisme $\tilde{\nu}$ est le groupe de tresses pures P_n. On définit de même le morphisme $\nu : G_n \to \Sigma_n$ définit par :

$$\nu(g_i) = (i, i+1) \ 1 \leq i \leq n-1.$$

Soit $H_n = \ker \nu$.

Lemme 2.1 *Le morphisme $\iota : G_n \to B_n$ est un isomorphisme si $\iota_{|H_n}$ est un isomorphisme sur P_n.*

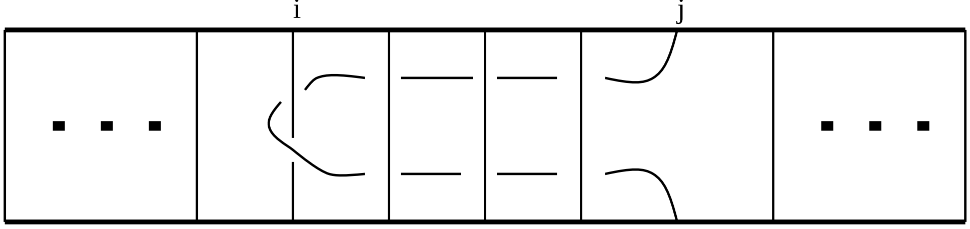
Preuve - le morphisme ν est clairement surjectif vu que les transpositions génèrent Σ_n. Donc on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & G_n & \xrightarrow{\nu} & \Sigma_n & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \iota_{|H_n} & & \downarrow \iota & & \downarrow 1 & & \\ 1 & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & \Sigma_n & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Les lignes étant exactes, on peut appliquer le "lemme des cinq" [1] qui montre directement le résultat. On est donc ramené à l'étude de P_n. On peut, comme précédemment, et à partir des σ_i, reconstituer des éléments $A_{i,j}$ qui semblent générer P_n. On prend :

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1} \quad 1 \leq i < j \leq n$$

On a la représentation suivante de $A_{i,j}$, tresse pure dont les brins i et j s'entrelacent de telle sorte que le brin i passe "dessus" puis "dessous" le brin j (dans cet ordre) en laissant libres les autres brins :



Les relations suivantes sont alors évidentes :

$$\begin{aligned} A_{r,s}A_{i,j}A_{r,s}^{-1} &= A_{i,j} \quad si\ r < s < i < j\ ou\ i < r < s < j && (3) \\ &= A_{r,j}A_{i,j}A_{r,j}^{-1} \quad si\ s = i && (4) \\ &= A_{i,j}A_{s,j}A_{i,j}A_{i,j}A_{s,j}^{-1} \quad si\ r = i < j < s && (5) \\ &= A_{r,j}A_{s,j}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{r,j}A_{s,j}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1} \quad si\ r < i < s < j && (6) \end{aligned}$$

On admettra alors le :

Théorème 2.8 *Le groupe P_n admet une représentation avec générateurs $A_{i,j}$ et relations (3) (4) (5) (6).*

1. Voir par exemple Eilenberg et Steenrod *Foundations of Algebraic Topology* Princeton University Press p.16 (1952)

Preuve - Voir [5].

En fait, le théorème initial stipule que, si l'on définit les $h_{i,j}$ par rapport au g_i comme l'on a définit les $A_{i,j}$ par rapport aux σ_i alors H_n admet une représentation par générateurs (les $h_{i,j}$) et relations (analogues de (3) (4) (5) et (6)). Ce dernier théorème est alors une conséquence immediate du théorème d'Artin.

Revenons donc à la demonstration de ce dernier.

Le groupe H_{n-1} peut être considéré comme sous-groupe de H_n engendré par l'ensemble $\{\ h_{i,j} |\ 1 \leq i < j \leq n-1\}$. On définit le morphisme η par :

$$\eta(h_{i,j}) = h_{i,j} \qquad 1 \leq i < j \leq n-1$$

et

$$\eta(h_{i,n}) = 1 \qquad 1 \leq i < n$$

Ainsi $\ker(\eta)$ est le groupe engendré par les éléments $h_{1,n}, \cdots, h_{n-1,n}$. Notons $U_n = \ker(\eta)$.

Si ρ est la projection canonique de $F_{0,n}$ sur $F_{0,n-1}$, le morphisme ρ_* l'image de ρ par le foncteur π_1, alors le théorème de la suite exacte d'homotopie implique que

$$\ker(\rho_*) = \pi_1 F_{n-1,1} = \pi_1(E^2 - Q_{n-1})$$

qui est un groupe libre de rang n-1. On vérifie aisément que le diagramme suivant est commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & U_n & \longrightarrow & H_n & \xrightarrow{\eta} & H_{n-1} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \iota_{n|U_n} & & \downarrow \iota_n & & \downarrow \iota_{n-1} & & \\
1 & \longrightarrow & \pi_1 F_{n-1,1} & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{\rho_*} & P_{n-1} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

où l'on note $\iota_n = \iota_{|H_n}$. Dans la ligne infèrieure, le point base de P_n est $(z_1^0, \cdots, z_n^0)$, et donc z_n^0 est le point base de $\pi_1 F_{n-1,1}$ (On prend $Q_{n-1} = z_1^0 \cup \cdots \cup z_{n-1}^0$).

Maintenant, vu la définition de $h_{i,n}$ et $A_{i,n} = \iota_n(h_{i,n})$, on peut identifier ce dernier comme une tresse dont tout les brins sont "triviaux" sauf le dernier qui entrelace le j-ième (et lui seul). Clairement, l'ensemble $\{A_{j,n} \quad 1 \leq j < n\}$ est une base libre du groupe $\pi_1 F_{n-1,1}$. La propriété de Hopf des groupes libres [2] implique alors que U_n est aussi un groupe libre et que $\iota_{n|U_n}$ est un isomorphisme pour tout n. Donc, vu le dernier diagramme en appliquant le "lemme des cinq" on obtient le resultat cherché.

Maintenant que nous connaissons la structure du groupe de tresses, nous pouvont essayer d'aborder le problème de la classifications des nœuds. Il se présente en ces termes : Etant donnés deux entrelacs (polygonaux), existe t-il un algorithme qui déciderait si ceux-ci sont équivalents ou non ? Nous avons le :

Théorème 2.9 (Markov) *Si $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}'$ sont deux tresses fermées représentées par $(\beta, n) = (\sigma_{\mu 1}^{\epsilon 1} \cdots \sigma_{\mu r}^{\epsilon r}, n)$ et $(\beta', n') = (\sigma_{\lambda 1}^{\delta 1} \cdots \sigma_{\lambda s}^{\delta s}, n')$ alors, $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}'$ sont équivalentes si et seulement si il existe une "chaine de déformation de (β, n) à (β', n')" :*

$$(\beta, n) = (\beta_1, n_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (\beta_k, n_k) = (\beta', n')$$

de telle sorte que toute tresse fermée (β_{i+1}, n_{i+1}) de la chaine se déduise de son prédécésseur (β_i, n_i) par une des transformations suivantes :

1. *Remplacer β_i par un de ses conjugués dans B_{n_i}. Prendre $n_{i+1} = n_i$.*
2. *Remplacer (β_i, n_i) par $(\beta_i \sigma_{n_i}^{\pm 1}, n_i + 1)$; ou, si $\beta_i = \gamma \sigma_{n_i - 1}^{\pm 1}$, où γ est uniquement composé à partir de $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n_i - 2}$, remplacer (β_i, n_i) par $(\gamma, n_i - 1)$.*

2. Voir par exemple Magnus, Karass et Solitar *Combinatorial group theory* Interscience (1966)

Preuve - Voir [5].

Donc, notre problème est équivalent à un problème algébrique qui est celui de la conjugaison dans le groupe de tresses. Or en 1969, F.Garside a donné un algorithme qui permet de décider si deux éléments du groupe de tresse sont conjugués ou pas. Cette algorithme est trop complexe pour être exposé ici. La référence systématique est [5]. Ce qu'il faut retenir c'est que le problème est calculable.

Evidemment, au vu de ce résultat, on est en droit d'espérer que le problème de la classification des nœuds est lui aussi calculable ; Résultat qui nous échappe aujourd'hui.

2.3 Quelques autres résultats.

On peut énoncer quelques autres théorèmes (que l'on trouvera dans [5]) :

Théorème 2.10 (Chow) *Si $n \geq 3$ le centre de B_n est le sous-groupe monogène engendré par $(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^n$.*

On peut aussi décrire le groupe de tresses comme groupe d'automorphismes d'un groupe libre $L_n = < x_1, \cdots, x_n >$ de rang n. La représentation est induite par une application ξ de B_n dans $\mathrm{Aut}(L_n)$ définie par :

$$\xi(\sigma_i) : \begin{array}{ccll} x_i & \mapsto & x_i x_{i+1} x_i^{-1} & \\ x_{i+1} & \mapsto & x_i & \\ x_j & \mapsto & x_j & \quad si\ j \neq i, i+1 \end{array}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.11 (Artin) *Si β est un automorphisme de L_n. Alors β est induit par un élément de B_n si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\beta(x_i) = A_i x_{\mu_i} A_i^{-1} \quad 1 \leq i \leq n$
2. $\beta(x_1 \cdots x_n) = x_1 \cdots x_n$

où $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ est une permutation de $(1, \cdots, n)$, et A_i est un mot de L_n.

En utilisant ce dernier résultat, nous sommes en mesure de donner une nouvelle interprétation géométrique du groupe de tresses :

Théorème 2.12 *Soit G le groupe des automorphismes de $\pi_1(D^2 - Q_n)$ induits par les homéomorphismes de $D^2 - Q_n$ qui laissent le bord de D^2 invariant (point par point). Alors G est exactement le groupe B_n.*

Où on a évidemment noté $D^2 - Q_n$, le disque privé de n points.

Une application de ce dernier théorème concerne la description du groupe fondamental du complémentaire d'un nœud :

Théorème 2.13 (Artin) *Soit $\beta \in B_n$, et supposons que l'action de β sur le groupe libre L_n est donnée par*

$$\beta(x_i) = A_i x_{\mu_i} A_i^{-1} \quad 1 \leq i \leq n$$

où $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ est une permutation de $(1, \cdots, n)$, et $A_i(x_1, \cdots, x_n)$ est un mot de L_n Si $\hat{\beta}$ est l'entrelac déterminé par β, alors le groupe fondamental $\pi_1(\boldsymbol{S}^3 - \hat{\beta})$ du complémentaire dans $\boldsymbol{S}^3$ de $\hat{\beta}$ admet la représentation par générateurs $y_1, \cdots, y_n$ et relations

$$y_i = A_i(y_1, \cdots, y_n) y_{\mu_i} A_i^{-1}(y_1, \cdots, y_n) \quad 1 \leq i \leq n-1$$

D'autres résultats concernent le groupe de tresses de la sphère :

Théorème 2.14 (Fadell-Van Buskirk) *Le groupe $\pi_1 B_{o,n} S^2$ admet une représentation avec générateurs $\delta_1, \cdots, \delta_{n-1}$ et relations :*

1. $\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i \quad |i-j| \geq 2,\ 1 \leq i, j \leq n-1$
2. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2$
3. $\delta_1 \cdots \delta_{n-2} \delta_{n-1}^2 \delta_{n-2} \cdots \delta_1 = 1$

La troisieme relation fait la différence entre les tresses "tracées" sur le plan, et celles tracées sur la sphère. Pour une liste de références sur les groupes de tresses des surfaces voir [5] page 36.

3 Représentation du groupe de tresses et invariants polynômiaux des nœuds.

On rappelle que l'on nomme mouvements de Markov les applications de B_n dans B_n (resp. B_{n+1}) suivantes :

type I : $\alpha \mapsto \beta\alpha\beta^{-1} \quad \beta \in B_n$
type II : $\alpha \mapsto \alpha\sigma_n^{\pm 1}$
Ce sont les transformations qui laissent invariant l'entrelac associé aux tresses.

3.1 Représentation de Burau, polynôme d'Alexander.

Définition 3.1 *La représentation de Burau est la représentation de B_n dans $M_n(\boldsymbol{C})$ définie par :*

$$\sigma_i \mapsto \beta_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1-t & t & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $t \in \boldsymbol{C}$, $1-t$ est le terme d'indice d'indice (i,i)

On vérifie que les β_i vérifient les deux équations définissant le groupe de tresses. Comme les β_i laissent invariants les vecteurs $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$$

on peut construire une représentation réduite de B_n.

Définition 3.2 *La représentation réduite de Burau de B_n dans $M_{n-1}(\boldsymbol{C})$ est définie par :*

$\sigma_i \mapsto b_i$ où :

$$b_1 = \begin{pmatrix} -t & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -t \end{pmatrix}$$

$$b_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -t & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & -t & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où le -t de la diagonale est en position (i,i).

Définition 3.3 *Soit $\alpha \in B_n$, e la somme des exposants de α considéré comme mot sur l'alphabet $(\sigma_i)_{1\leq i\leq n-1}$ (On vérifie que e est bien défini) ; Le polynôme d'Alexander est défini par :*

$$\Delta(t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{t}}\right)^{e-n+1} \left(\frac{1-t}{1-t^n}\right) \det(1-\psi(\alpha))$$

$\psi(\alpha)$ étant la représentation réduite de Burau de α.

Théorème 3.1 *$\Delta(t)$ est invariant par les mouvements de Markov : c'est un invariant de nœud.*

Ce polynôme a été découvert en 1928 (Voir [2]).
Preuve - L'invariance par conjugaison est claire (type I) : c'est tout l'interêt de la représentation matricielle qui fournit des invariants de similitude. Pour le type II, on peut faire la vérification "à la main" ou considérer le polynôme d'Alexander comme spécialisation d'un autre polynôme (voir plus tard).

3.2 Algébres de Hecke.

On ne considerera ici que les algèbres de Hecke du type A.

Définition 3.4 *Soit $q \in \boldsymbol{C}$. L'algèbre de Hecke $H(q,n)$ est l'algèbre sur $\boldsymbol{C}$ engendrée par des éléments $g_1, \cdots, g_{n-1}$ avec les relations :*

$$g_i^2 = (q-1)g_i + q \tag{7}$$

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \tag{8}$$

$$g_i g_j = g_j g_i \quad si\ |j-i| \geq 2 \tag{9}$$

Remarque 3.1 *Le groupe symétrique Σ_n est le quotient de B_n par la relation d'équivalence engendrée par les relations $\sigma_i^2 = 1$. Une tresse peut en effet être vue comme une permutation de $\{1, \cdots, n\}$ (sans s'interresser aux entrelacements des fils : les σ_i représentant simplement la permutation $(i, i+1)$).*

Pour $q = 1$, on a $H(1,n) = \mathbf{CS}_n$.
Mais si on considère Σ_n comme un ensemble de mots sur l'alphabet $(\sigma_i)_{1\leq i\leq n-1}$, les mots de longueur minimale pour les relations définissant Σ_n seront les mots de longueur minimale pour les relations de l'algébre de Hecke. On a alors le :

Théorème 3.2 $\dim(H(q,n)) = n!$

Une base de $H(q,n)$ est par exemple

$$\{(g_{i_1}g_{i_1-1}\cdots g_{i_1-k_1})(g_{i_2}g_{i_2-1}\cdots g_{i_2-k_2})(g_{i_p}g_{i_p-1}\cdots g_{i_p-k_p})|\ 1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n-1\}$$

ce qui s'interprète simplement en termes de permutations : i_p est le plus grand indice tel que $\sigma^{-1}(i_p+1) \neq i_p+1$ etc.
Pour être rigoureux, il faudrait établir l'associativité du produit dans cette base. Des preuves plus fines de cette proposition peuvent se trouver (raisonnements en termes de déformations (Voir [6]) .).

On définit une représentation de B_n dans $H(q,n)$ par $\pi\ :\ \sigma_i\ \mapsto\ g_i$

3.3 Trace d'Ocneanu.

Théorème 3.3 *Pout tout $z \in \boldsymbol{C}$, il existe une unique trace linéaire :*

$$tr\ :\ \bigcup_{n=1}^{\infty} H(q,n) \to \boldsymbol{C}$$

telle que :

$$\begin{aligned} tr(ab) &= tr(ba) && (10)\\ tr(1) &= 1 && (11)\\ tr(xg_n) &= z\,tr(x) \quad si\ x\in H(q,n) && (12)\end{aligned}$$

Preuve - On a un isomorphisme :

$$C\ :\ H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n \xrightarrow{\sim} H_{n+1}$$

en posant $x \oplus y_1 \otimes y_2 = x \oplus y_1 g_n y_2$.
C est bien définit et linéaire. La surjectivité vient du fait que, dans la base exhibée plus haut, g_n n'apparaît jamais plus d'une fois. L'égalité des dimensions : $(n+1)! = n! + \frac{(n!)^2}{(n-1)!}$ entraîne l'injectivité.
On définit alors par récurrence : tr(1)=1 et $\mathrm{tr}(xg_ny) = z(tr)(xy)$ ce qui entraîne bien l'unicité. Par l'existence, (11) et (12) étant vérifiées, il reste à montrer que (10) est satisfaite. On se réfèrera à l'article de Jones [11].

3.4 Un nouvel invariant polynômial.

On cherche une représentation normalisée de $B_n \to H(q,n)$ telle que les mouvements de Markov de type II (ie multiplication par g_n ou g_n^{-1}) aient le même effet sur la trace. On cherche donc θ tel que

$$\mathrm{tr}(\theta g_i) = \mathrm{tr}((\theta g_i)^{-1})$$

On trouve

$$\theta^2 = \frac{1-q+z}{qz} := \lambda$$

On est alors amené à poser :

Définition 3.5 *Soit L un entrelac, $\alpha \in B_n$ représentant cet entrelac ; alors*

$$\chi_L(q,\lambda) = \left(-\frac{1-\lambda q}{sqrt\lambda(1-q)}\right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^e tr(\pi(\alpha))$$

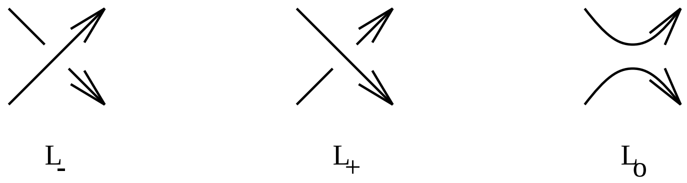
est un polynôme à deux variables : q et λ, invariant (ie indépendant de la tresse α associée à L)

NB - e a la même signification qu'en 3.1.

L'invariance par les mouvements de Markov de type II vient de la normalisation effectuée ; la propriétée tr(ab)=tr(ba) entraîne l'invariance par conjugaison.

Théorème 3.4 *En posant $P_L(t,x) = \chi_L(q,\lambda)$ avec $t = \sqrt{\lambda q}$ et $x = \frac{\sqrt{q}-1}{\sqrt{q}}$ on obtient un nouvel invariant de nœud. De plus, $P_L(t,x)$ est défini de manière unique par la "Skein Rule" : Si L_+, L_-, L_0 sont trois entrelacs identiques à un croisement près (voir figure), alors*

$$t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = xP_{L_0}$$



Preuve - Par mouvement de Markov de type I, on se ramène au cas où : $L_+ = \hat{\alpha}\sigma_i^2$, $L_- = \hat{\alpha}$, $L_+ = \hat{\alpha}\sigma_i$. Voir Jones [11].
NB - Il s'agit là du polynôme HOMFLY (Hoste Ocneanu Freyd Lickorish Yetter).

Exemples -

L'entrelac L trivial à n brins a pour polynômes :

$$\chi_L(q,\lambda) = \left(-\frac{1-\lambda q}{\sqrt{\lambda}(1-q)}\right)^{n-1}$$

$$P_L(t,x) = \left(\frac{t-t^{-1}}{x}\right)^{nt}$$

La "Skein rule" permet de calculer le polynôme P_L à partir du nœud trivial.

Juxtaposition d'entrelacs : $\chi_{L_1\sharp L_2} = \chi_{L_1}\chi_{L_2}$ où, si $L_1 = \hat{\alpha_1}$, $L_2 = \hat{\alpha_2}$, $\alpha_1 \in B_n$, $\alpha_2 \in B_m$ alors $L_1\sharp L_2 = \widehat{\alpha_1\Sigma^{n-1}\alpha_2}$ où Σ désigne le shift : $\sigma_i \mapsto \sigma_{i+1}$.

Orientation : Si L' a l'orientation opposée à celle de L alors $P_L = P_{L'}$ (Se voit par la "Skein Rule").
On peut aussi remarquer que l'on a un antimorphisme :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & B_n & \longrightarrow & B_n \\ & \sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k} & \longmapsto & \sigma_{i_k}\cdots\sigma_{i_1} \end{array}$$

par symétrie des relations définissant B_n. ϕ se transporte sur $H(q,n)$ en laissant la trace invariante ; d'où $\chi_L = \chi_{L'}$.

Chiralité : Si $\tilde{L}$ est l'image de L par un miroir, $P_{\tilde{L}}(t,x) = P_L(t^{-1}, -x)$. Si $\alpha \in B_n$, son image par un miroir est $\phi(\alpha^{-1})$. Pour la preuve, voir Jones [11]. On pose $(q+1)e_i - 1 = g_i$ et on fait les calculs sur les e_i. On montre en particulier que $\mathrm{tr}(e_i) = \frac{q(1-\lambda)}{(1+q)(1-\lambda q)}$. On a alors le :

Théorème 3.5 *Si $|e| > n-1$, $\hat{\alpha}$ est chiral (et en particulier non trivial).*

Preuve - La formule énoncée plus haut montre que pour $q \neq 0$ fixé, $\mathrm{tr}(\pi(\alpha))$ a une limite finie quand $\lambda \to 0$. Pour $e > n-1$, $\chi_L(q,\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to 0$ à $q \neq 0$ fixé. Mais χ_L est un polynôme de laurent en $\sqrt{\lambda}$ et q ; il ne peut contenir de puissance négative de $\sqrt{\lambda}$ donc $\chi_L \neq \chi_{\tilde{L}}$. Idem pour $e < n-1$.

Remarque 3.2 *Le polynôme d'Alexander est une spécialisation de χ_L : $\Delta_L(t) = \chi_L(t, 1/t)$. On voit qu'il y a une singularité dans la définition de la trace, mais on peut l'éliminer. Dans [11], Jones donne un moyen de le faire en utilisant une définition de la trace fondée sur le fait que l'algèbre de Hecke est produit d'algèbres de matrices ; Sur chaque algèbre de matrice, la trace d'Ocneanu est proportionnelle à la trace ordinaire. Il suffit donc de déterminer le poids des différentes algèbres.*

4 Bibliographie.

[1] J.W.Alexander *A lemma on systems of knotted curves.* Proc.Nat.Acad Vol.9 pp 93-95 (1923).

[2] J.W.Alexander *Topological invariants of knots and links.* American Mathématical Society Vol 30 pp 275-306 (1928)

[3] E.Artin - *Theory of braids.* Annals of Mathématics Vol.48 pp 101-126 (1947).

[4] J.Birman - *On braids groups.* Com. Pure and App.Math. Vol 22 pp 41-72 (1969).

[5] * J.Birman - *Braids, links and mapping class groups.* Princeton University Press and University of Tokyo Press (1974).

[6] N.Bourbaki - *Groupes et algébres de Lie (IV, V, VI).*

[7] Briekskorn (d'après V.I.Arnold) - *Sur les groupes de tresses.* Séminaire Bourbaki n° 401 (1971).

[8] * P.Cartier - *Développements récents sur les groupes de tresses. Applications à la topologie et à l'algèbre.*Séminaire Bourbaki n° 716 (1989).

[9] C.Goldberg *An exact sequence of braids groups.* Math.Scand. Vol 33 pp 69-82 (1973).

[10] V.Jones - *A polynomial invariant for knots via Von Neumann Algebras.* Bulletin of Amerérican Mathématical Society Vol 12 pp 103-111 (1985).

[11] * V.Jones - *Hecke Algebra Representations of braid groups and link polynomials.* Ann. of Math. Vol 126 pp 335-388 (1987).

[12] Freyd, Yetter, Host, Lickorish, Millet, Ocneanu - *A new polynomial invariant of knots and links.* Bull of Amer.Math.Soc pp 183-312 (1985)

[13] *New developments in the theory of knots.* Advanced Series in Mathematical Physics Vol 11 World Scientific.

Les ouvrages ou articles marqués d'un * ont été les principales bases de cet exposé.