Jean-Marie LAPEYRE
Laboratoire E. Picard, UFR-MIG, Université P. Sabatier Toulouse III.
tel.: *05.61.53.60.26* **e-mail**: lapeyre@picard.ups-tlse.fr

Étude asymptotique de la correspondance de Riemann-Hilbert

En géométrie algébrique transcendante, il est interessant de construire des espaces, dits "de modules", qui paramètrent les solutions d'un problème et de les étudier eux-mêmes en tant qu'objets géométriques.

Ici, On cherche à relier, grosso modo, l'étude des équations différentielles régulières sur une surface de Riemann (que paramètre indirectement l'espace des modules de Betti) et certains invariants de cet objet géométrique (la cohomologie de De Rham algébrique).

Équations différentielles et monodromie

Étant donnée une équation différentielle sur une surface de Riemann X, on peut chercher à déterminer si oui ou non elle admet des solutions définies globalement. Pour ce faire, on va calculer sa monodromie, une quantité qui mesure de combien il faut déformer l'équation (et l'espace sur lequelle elle vit) pour "forcer" l'existence de telles solutions. Ce nouvel objet est alors plus aisément manipulable (d'un point de vue algébrique). La correspondance de Riemann-Hilbert est l'application qui à une telle équation différentielle associe sa monodromie.

Fixons $x_0 \in X$. La monodromie est donnée par la résolution de l'équation différentielle sur les courbes γ tracées sur X paramétrées par le temps (de $t = 0$ à $t = 1$). (On est ramené au cas des équations différentielles linéaires sur $\mathbf{R}$ pour lesquelles le théorème de Cauchy-Lipschitz assure existence locale et unicité à condition initiale prescrite). Donc, à condition initiale $\eta(\gamma(0)) = y_0$ donnée, et en résolvant l'équation de proche en proche, on obtient, par unicité, une valeur pour $\eta(\gamma(1)) = y_1$. Notons alors $H(\gamma)$ l'application linéaire qui à y_0 associe y_1. La monodromie de ∇ est alors l'application $\gamma \mapsto H(\gamma)$ restreinte aux courbes fermées (i.e. telles que $\gamma(0) = \gamma(1)$).

Paramétrisation de l'ensemble des équations différentielles

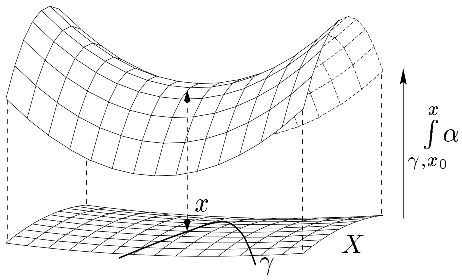
Une belle théorie décrit la construction d'espaces paramétrant, d'une part, l'ensemble des équations différentielles sur X et, d'autre part, l'ensemble des monodromies possibles. La correspondance de Riemann-Hilbert apparait comme une bijection entre ces deux objets.

Une des difficultés du sujet est de comprendre comment la correspondance évolue quand on part à l'infini, ce qui revient à considérer des perturbations d'équations différentielles de plus en plus importantes.

Comportement asymptotique

Soit une équation différentielle sur X représentée par un opérateur ∇ (l'équation est alors $\nabla\eta = 0$). On va perturber "linéairement" cet opérateur par une forme différentielle α et étudier $\nabla + t\alpha$ pout t tendant vers l'infini.

Il se trouve que le renseignement essentiel est porté par les zéros de α, là où la fonction $\varphi : x \mapsto \int_{\gamma,x_0}^{x} \alpha$ admet des cols (voir figure). Plus précisément, le facteur prédominant dans la correspondance de Riemann-Hilbert est $\sum e^{t\int_{\gamma,x_0}^{x_i} \alpha}$ où les x_i sont les points où les cols de φ sont les plus hauts.



En particulier, ce comportement est assez indépendant de ∇ (et de l'espace où cet opérateur vit).

Ce type de résultat laisse espérer l'existence d'une description unifiée de ces équations tenant compte de leurs comportement à l'infini.

Références

[Del70] P. Deligne. *Equations différentielle à points singuliers réguliers.* Number 163 in Lecture Notes in Maths. Springer-Verlag, 1970.

[Sim94] C.T. Simpson. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I et II. *Publications Mathématiques IHES*, 79 et 80, 1994.