Résumé des travaux de deuxième année de thèse

Jean-Marie LAPEYRE

Nous nous proposons d'expliciter l'isomorphisme induit par la correspondance de Riemann-Hilbert sur la cohomologie, comme décrit p. 46 du rapport de magistère.

1 Holonomie d'une perturbation d'un fibré inversible plat sur une surface de Riemann compacte

Soit X une surface de Riemann compacte, (L, ∇_0) un fibré inversible plat sur X et $\alpha \in \Omega^1_X$ une forme holomorphe sur L. Pour tout $t \in \mathbf{C}$, $\nabla_t = \nabla_0 + t\alpha$ est une connexion sur L, intégrable.

Soit alors $\tilde{X}$ le revêtement unversel de X (on fixe $x_0 \in X$, et on regardera $\tilde{X}$ comme l'ensemble des chemins d'origine x_0, à but fixé, modulo homotopie). On note

$$H_t : \tilde{X} \to GL(1, \mathbf{C})$$

l'holonomie de ∇_t.

On posera dans la suite

$$h(\gamma) = \int_\gamma \alpha$$

Proposition 1

$$H_t(\gamma) = e^{-th(\gamma)} H_0(\gamma)$$

Preuve :
Il suffit de décrire les sections locales horizontales de ∇_t en fonction de celles de ∇_0.

Si η_0 est une section horizontale de ∇_0, alors une section horizontale, η, de ∇_t peut s'écrire $\eta = \lambda \nabla_0$ (méthode de variation de la constante). On obtient alors

$$\mathrm{d}\lambda + t\alpha\lambda = 0$$

donc $\lambda = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} e^{-th(\gamma)}$ le long de γ car $\mathrm{d}h = \alpha$. La résolution de proche en proche donne bien le résultat demandé. $\square$

2 Expression de l'isomorphisme sur la cohomologie

Nous pouvons associer à un fibré plat, sa cohomologie de De Rham, qui est l'hypercohomologie du complexe $(\Omega^\bullet_X \otimes L, \nabla_t)$ et l'homologie singulière à valeur dans le faisceau des sections horizontales, L^{∇_t}.

Pour faire le lien entre ces deux objets, nous allons utiliser un argument du type de celui utilisé dans la preuve élémentaire de l'isomorphisme de Čech-De Rham. En effet, nous pouvons construire les doubles complexes suivants, un bon recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ étant donné : Posons

$$K_\infty^{k,l} = \prod_{i_1<\cdots<i_l} \mathcal{A}^k \otimes L(U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_l})$$

et

$$K_\omega^{k,l} = \prod_{i_1<\cdots<i_l} \Omega^k \otimes L(U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_l})$$

On forme les doubles complexes K_∞ et K_ω en prenant l'opérateur ∇_t comme différentielle horizontale et le morphisme bord de l'homologie singulière comme différentielle verticale. Le noyau des flèches verticales est le complexe de De Rham "global" et celui des flèches horizontales est le complexe de Čech du faisceau L^{∇_t} des sections horizontales.

Les lignes et les colonnes de K_∞ sont exactes (généralisation immédiate de l'argument de Čech-De Rham), mais, les colonnes ne sont pas exactes dans K_ω (car on ne dispose pas de partition de l'unité holomorphe ; les lignes restent exacte par Mayer-Vietoris).

Hors c'est le cas algébrique (ou holomorphe) qui nous interesse (ie celui de K_ω). Pour pouvoir trouver une formule, on va affaiblir la structure en ne prenant que des contraintes lisses -et non plus holomorphes- ce qui revient à substituer K_∞ à K_ω.

Dans le cas lisse, on a le

Théorème 1 *L'accouplement suivant est non dégénéré.*

$$\begin{array}{ccccc} H^i_{DR}(\mathcal{A}^\bullet \otimes L, \nabla_t) & \otimes & H_i(X, (L^{\nabla_t})^\vee) & \to & \mathbf{C} \\ \eta & \otimes & \sum \gamma \otimes \varphi & \mapsto & \sum \int_\gamma < \eta, \varphi > \end{array}$$

où $^\vee$ désigne le passage au dual et $<,>$, le crochet de dualité et H_DR la cohomologie de De Rham "globale".

En particulier, on a un isomorphisme entre $H^i_{DR}(\mathcal{A}^\bullet \otimes L, \nabla_t)$ et $H^i(X, (L^{\nabla_t})^\vee)$.

Preuve :
Identique à celle de la dualité de Poincaré □

Dans notre cas (ce théorème peut s'affranchir des hypothèses de dimension et de rang), on peut reformuler la dualité en faisant apparaitre l'holonomie. On réécrit, par définition de L^{∇_t}, $\varphi = H_t(\gamma)^{-1}\varphi_{x_0}$ où φ_{x_0} est une forme sur la fibre L_{x_0} de L au dessus de x_0. Donc, d'après la première partie, on a

$$\sum \int_\gamma < \eta, \varphi > = \sum \int_\gamma < \eta, e^{th(\gamma)} H_0(\gamma)\varphi_{x_0} >$$

On voudrait avoir une telle formule dans le cas holomorphe. Si tel était le cas on pourrait étudier l'intégrale précédente, quand t tends vers l'infini, par la méthode de la phase stationnaire.

3 Cas holomorphe

L'obstruction au calcul précédent dans le cas holomorphe réside dans la non exactitude des colonnes de K_ω. Toutefois, on peut s'approcher du cas qui nous interesse en faisant intervenir les formes différentielles méromorphes de deuxième type qui sont les formes méromorphes qui n'ont pas de résidu. On peut donner la définition équivalente suivante :

Définition 1 *Une* forme différentielle de deuxième type *est donnée par une forme méromorphe fermée ϕ telle qu'il existe un diviseur D tel que ϕ est holomorphe sur $U = X - D$ et est dans l'image de $H_{DR}(X) \to H_{DR}(U)$*

Une propriété intéressante est que, si on étend le bicomplexe K_ω en le complexe $K_\omega(*)_0$ en considérant les formes de deuxième type, alors lignes et colonnes deviennent exactes.

Les mêmes calculs redonnent alors la formule que l'on attend : la dualité est donnée par

$$\sum \int_\gamma < \eta, e^{th(\gamma)} H_0(\gamma) \varphi_{x_0} >$$

Cette fois ci, l'intégrande est méromorphe. Via la transformée de Laplace, on peut montrer que la méthode de la phase stationnaire s'applique (malgré la non holomorphie : on a un contrôle des pôles). La seule dépendance en t dans la formule, outre le terme exponentiel, ne peut venir que de η.

Or, la cohomologie de De Rham des surfaces de Riemann compacte étant de dimension finie, la perturbation induite sur les classes de sections dans la cohomologie ne peut être que rationnelle (formule de Cramer) Donc la dépendance en t de η est rationnelle.

D'autre part, si l'on choisi bien le recouvrement et le représentant de γ dans $\tilde{X}$, la formule du cas lisse déterminera le comportement assymptotique car seuls les cols de h donnent la partie principale (Il suffit de choisir le recouvrement de tel sorte que les cols soient dans des "parties non sensibles")

Les cols de h sont exactement les zéros de α, car $\mathrm{d}h = \alpha$. Notons alors $x_1, \ldots, x_r$ les zéros de α tels que $\Re e(h(\gamma(x_i))$ soit maximale. La méthode du col nous donne la partie principale de l'intégrale de dualité :

$$\sum \sum_i e^{th(\gamma(x_i))}$$

qui a bien un sens à un facteur rationnel près.

On peut donc espérer montrer le

Théorème 2 *L'isomorphisme induit sur la cohomologie d'um fibré inversible plat, défini sur une surface de Riemann, perturbé linéairement par une forme $\alpha \in \Omega^1_X$, ne dépend, assymptotiquement, que des zéros de α*

4 Prospectives

À ce stade, deux directions de recherche se présentent : la première est celle consistant à établir une série de démonstrations basées sur les suites spectrales. Une des principales justification de cela est le fait que les articles principaux utilisant les formes de deuxième type ont été écrits en utilisant cette technique. Une autre raison est de faciliter l'adaptation des démonstrations en dimensions supérieures.

Car l'axe le plus important est celui qui pourrait permettre la généralisation de ces résultats hors du cadre limitatif des surfaces de Riemann compactes. Une idée serait d'étudier les résultats en dimension un *relative* ie en considérant des morphismes lisses de dimension 1.