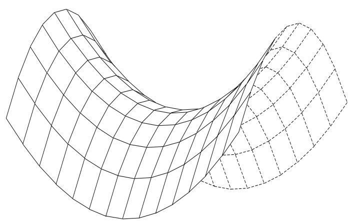
Jean-Marie LAPEYRE
Laboratoire E. Picard, UFR-MIG, Université P. Sabatier Toulouse III.
tel. : *05.61.53.60.26* **e-mail** *:* `lapeyre@picard.ups-tlse.fr`

Étude asymptotique de la correspondance de Riemann-Hilbert

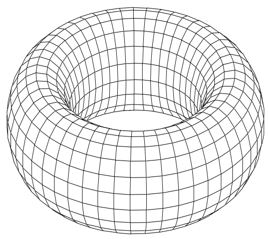
La géométrie algébrique complexe

Située à l'interface de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse, la géométrie algébrique complexe emprunte des outils et concepts issus de nombreuses théories sans lien direct apparent.

Déjà très active dès le début du siècle, la théorie a pu bénéficier des progrès spectaculaires de la géométrie algébrique d'après guerre (celle la même qui a conduit à la démonstration du grand théorème de Fermat il y a trois ans). Outre son caractère très technique, la théorie peut charmer du fait de la simplicité des objets qu'elle manipule : les variétés algébriques (i.e. les courbes, surfaces,... définies par des polynômes tels les ellipses, tores et autres paraboloïdes hyperboliques).



Paraboloïde Hyperbolique



Tore

La sous-théorie dans laquelle s'inscrit cette thèse permet, entre autres, de caractériser la structure de l'invariant géométrique le plus simple et le plus célèbre des variétés algébriques complexes (projectives et lisses).

La correspondance de Riemann-Hilbert

Étant donnée une équation différentielle ordinaire sur une variété algébrique, on cherche à savoir si elle admet des solutions définies partout. Pour cela, on lui associe un objet, sa monodromie, qui va mesurer ses chances d'admettre des solutions globales (i.e. de combien il faut la perturber pour forcer de telles solutions). La monodromie d'une telle équation est donnée par une représentation du groupe de Poincaré de la variété de base. (Le groupe de Poincaré est, grosso modo, l'ensemble des chemins tracés sur la variété à déformation continue près ; Cet ensemble est muni d'une loi de composition interne associative et symétrisable -ce que l'on désigne par un groupe- donnée par la "mise bout à bout" des chemins. Les représentations -linéaires- d'un groupe sont, tout simplement, les applications d'origine ce groupe et de but l'ensemble des matrices inversibles qui respectent la structure de groupe -ie les morphismes-).

La correspondance de Riemann-Hilbert est l'application qui à une équation différentielle associe sa monodromie (qui est, à quelques restrictions près, biunivoque).

Étude asymptotique

Notre but est d'étudier cette correspondance quand on augmente la pertubation indéfiniment. Précisément, si notre équation de départ est donnée par l'opérateur différentiel ∇ (i.e. par l'équation $\nabla\eta = 0$) et que l'on perturbe "linéairement" cet opérateur par la forme différentielle α, on cherche à caractériser le comportement de la monodromie de l'opérateur $\nabla + t\alpha$ quand on fait tendre t vers l'infini. On peut vérifier que beaucoup d'information se lit dans l'ensemble des zéros de α.

Ce type de résultat peut permettre de poser des jalons dans l'étude de la compactification des espaces de modules de De Rham qui contiennent tous les éléments permettant de mieux comprendre le comportement des systèmes différentiels sur les variétés algébriques complexes (projectives et lisses).

Perspectives

Il est assez difficile de prévoir les retombées de tels travaux dans un contexte industriel. Le seul champ d'application éventuel est la physique théorique qui n'est pas réputée pour être aisément industrialisable...

En contrepartie, comme pour tous les travaux à caractère essentiellement "philosophique", les besoins matèriels sont quasi nuls.